Ejercicios o demostraciones relacionados con las Transformaciones de Fourier

1.– Obtener la integral de Fourier de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 1; |x| < 1 \\ \\ 0; |x| > 1 \end{cases}$$

Solución 1. Sea $f(x)$ una función no periódica, continua a trozos y cuya integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ sea finita; su integral de Fourier viene dada por

$$f(x) = \int_0^{+\infty} [A(\omega)\cos(\omega x) + B(\omega)\sin(\omega x)]\, d\omega$$

siendo $A(\omega)$ y $B(\omega)$ los coeficientes

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\cos(\omega s)ds; \qquad B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\sin(\omega s)ds$$

En el caso de la función $f(x) = \begin{cases} 1; |x| < 1 \\ \\ 0; |x| > 1 \end{cases}$, los coeficientes $A(\omega)$ y $B(\omega)$ son

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \cos(\omega s)ds = \frac{2\sin(\omega)}{\pi\omega}; \qquad B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \sin(\omega s)ds = 0$$

por lo que su integral de Fourier es

$$\boxed{f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\omega)}{\omega}\cos(\omega x)d\omega}$$

2.– Las Transformadas de Fourier en Seno ($\mathcal{F}_{\mathcal{S}}[f(x)]$) y en Coseno ($\mathcal{F}_{\mathcal{C}}[f(x)]$) de una función $f(x)$ se calculan según

$$\mathcal{F}_{\mathcal{S}}[f(x)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(x)\sin(\omega x)dx; \qquad \mathcal{F}_{\mathcal{C}}[f(x)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(x)\cos(\omega x)dx$$

Obtener las expresiones de las transformadas de Fourier en Seno y Coseno de la primera derivada ($f'(x)$) y de la derivada segunda ($f''(x)$).

Solución 2. Sea $f(x)$ una función no periódica continua definida en $(0, +\infty)$, cuya primera derivada sea una función continua a trozos, en la que las integrales $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ y $\int_0^{+\infty} f'(x)dx$ sean finitas, y que verifique $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, se cumple que

$$\boxed{\mathcal{F}_{\mathcal{C}}[f'] = \omega\mathcal{F}_{\mathcal{S}}[f] - \sqrt{\frac{2}{\pi}}f(0); \qquad \mathcal{F}_{\mathcal{S}}[f'] = -\omega\mathcal{F}_{\mathcal{C}}[f]}$$

Estas expresiones se demuestran sustituyendo en las definiciones de las transformadas e integrando por partes a continuación, esto es,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\mathcal{C}}[f'] &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f'(x)\cos(\omega x)dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[f(x)\cos(\omega x)\Big|_0^{+\infty} + \omega\int_0^{+\infty} f(x)\sin(\omega x)dx\right]\\ &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}}f(0) + \omega\mathcal{F}_{\mathcal{S}}[f]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\mathcal{S}}[f'] &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f'(x)\sin(\omega x)dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[f(x)\sin(\omega x)\Big|_0^{+\infty} - \omega\int_0^{+\infty} f(x)\cos(\omega x)dx\right]\\ &= -\omega\mathcal{F}_{\mathcal{C}}[f]\end{aligned}$$

A partir de estas expresiones se pueden deducir las transformaciones de la segunda derivada de una función: así, sea $f(x)$ una función no periódica definida en $(0,+\infty)$ con primera derivada continua, segunda derivada continua a trozos, en la que las integrales $\int_0^{+\infty} f(x)dx$, $\int_0^{+\infty} f'(x)dx$ y $\int_0^{+\infty} f''(x)dx$ sean finitas, y que verifique $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$ se cumple que

$$\boxed{\mathcal{F}_{\mathcal{C}}[f''] = -\omega^2\mathcal{F}_{\mathcal{C}}[f] - \sqrt{\frac{2}{\pi}}f'(0); \qquad \mathcal{F}_{\mathcal{S}}[f''] = -\omega^2\mathcal{F}_{\mathcal{S}}[f] + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\omega f(0)}$$

3.– Considérese el problema parabólico siguiente

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \qquad 0 < x < +\infty, \quad t > 0;$$
$$u(0,t) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} u(x,t) = 0, \quad t \geq 0; \quad u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x < +\infty;$$

donde la función $f(x)$ es conocida. Obtener la función $u(x,t)$.

Solución 3. La aplicación de la transformada de Fourier en Seno a la ecuación diferencial en derivadas parciales conduce a

$$\mathcal{F}_{\mathcal{S}}\left[\frac{\partial u}{\partial t} - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{F}_{\mathcal{S}}[u]}{\partial t} - k\left(-\omega^2\mathcal{F}_{\mathcal{S}}[u] + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\omega\, u(0,t)\right) = 0$$

Si se denomina $U(\omega,t) = \mathcal{F}_{\mathcal{S}}[u(x,t)]$ y tenemos en cuenta la condición de contorno $u(0,t) = 0$, resulta la ecuación diferencial ordinaria en la variable t

$$\frac{\partial U}{\partial t} + k\omega^2 U = 0$$

que junto a la transformada de Fourier en seno de la condición inicial $u(x,0) = f(x)$, esto es $U(\omega,0) \equiv \mathcal{F}_{\mathcal{S}}[u(x,0)] = \mathcal{F}_{\mathcal{S}}[f(x)] = F(\omega)$, da lugar al problema de valores iniciales

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -k\omega^2 U, \qquad U(\omega,0) = F(\omega)$$

cuya solución es

$$U(\omega,t) = F(\omega)e^{-k\omega^2 t}$$

$U(\omega,t)$ es la solución del problema planteado en el dominio ω. La solución final se obtiene de la transformada inversa de Fourier en seno de $U(\omega,t)$, es decir,

$$u(x,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}U(\omega,t)\sin(\omega x)d\omega=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}F(\omega)e^{-k\omega^2t}\sin(\omega x)d\omega$$

Finalmente si se sustituye $F(\omega)$ por su valor como transformada de Fourier en Seno de $f(x)$ resulta

$$\boxed{u(x,t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}f(s)\sin(\omega s)ds\right)e^{-k\omega^2t}\sin(\omega x)d\omega}$$

4.– La Transformada de Fourier ($\mathcal{F}[f(x)]$) de una función $f(x)$ se calcula según

$$\mathcal{F}[f(x)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx$$

siendo $i=\sqrt{-1}$. Obtener las expresiones de las transformadas de Fourier de la primera derivada ($f'(x)$) y de la derivada segunda ($f''(x)$).

Solución 4. Sea $f(x)$ una función no periódica continua en $(-\infty,+\infty)$, cuya primera derivada sea una función continua a trozos, en la que las integrales $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ y $\int_{-\infty}^{+\infty}f'(x)dx$ sean finitas, y que verifique $\lim\limits_{|x|\to+\infty}f(x)=0$, se cumple que

$$\boxed{\mathcal{F}[f']=i\omega\mathcal{F}[f]}$$

Esta expresión se demuestra sustituyendo en la definición de la transformada e integrando por partes a continuación, esto es,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f']&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f'(x)e^{-i\omega x}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[f(x)e^{-i\omega x}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+i\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\omega x}\,dx\right]\\&=i\omega\mathcal{F}[f]\end{aligned}$$

Del mismo modo se puede deducir la transformación de la segunda derivada de una función: así, sea $f(x)$ una función no periódica definida en $(-\infty,+\infty)$ con primera derivada continua, segunda derivada continua a trozos, en la que las integrales $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty}f'(x)dx$ y $\int_{-\infty}^{+\infty}f''(x)dx$ sean finitas, y que verifique $\lim\limits_{|x|\to+\infty}f(x)=0$ y $\lim\limits_{|x|\to+\infty}f'(x)=0$ se cumple que

$$\boxed{\mathcal{F}[f'']=-\omega^2\mathcal{F}[f]}$$

5.– Considérese el problema parabólico siguiente

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \qquad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0;$$
$$\lim_{x\to-\infty} u(x,t) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} u(x,t) = 0, \quad t \geq 0; \quad u(x,0) = f(x), \quad -\infty < x < +\infty;$$

donde la función $f(x)$ es conocida. Obtener la función $u(x,t)$.

Solución 5. La aplicación de la transformada de Fourier a la ecuación diferencial en derivadas parciales conduce a

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial u}{\partial t} - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{F}[u]}{\partial t} - k\left(-\omega^2\mathcal{F}[u]\right) = 0$$

Si se denomina $U(\omega,t) = \mathcal{F}[u(x,t)]$, resulta la ecuación diferencial ordinaria en la variable t

$$\frac{\partial U}{\partial t} + k\omega^2 U = 0$$

que junto a la transformada de Fourier de la condición inicial $u(x,0) = f(x)$, esto es $U(\omega,0) \equiv \mathcal{F}[u(x,0)] = \mathcal{F}[f(x)] = F(\omega)$, da lugar al problema de valores iniciales

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -k\omega^2 U, \qquad U(\omega,0) = F(\omega)$$

cuya solución es

$$U(\omega,t) = F(\omega)e^{-k\omega^2 t}$$

$U(\omega,t)$ es la solución del problema planteado en el dominio ω. La solución final se obtiene de la transformada inversa de Fourier de $U(\omega,t)$, es decir,

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} U(\omega,t)e^{i\omega x}d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{-k\omega^2 t}e^{i\omega x}d\omega$$

Así, si se sustituye $F(\omega)$ por su valor como transformada de Fourier de $f(x)$ resulta

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)e^{-i\omega s}ds\right)e^{-k\omega^2 t}e^{i\omega x}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)e^{-k\omega^2 t}e^{i\omega(x-s)}\,ds\,d\omega \end{aligned}$$

Finalmente si tenemos en cuenta que $e^{-k\omega^2 t}$ es una función par en la variable ω, y que

$$e^{i\omega(x-s)} = \cos(\omega(x-s)) + i\sin(\omega(x-s))$$

la solución final se puede expresar como

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} f(s)e^{-k\omega^2 t}\cos(\omega(x-s))\,d\omega\,ds}$$
