Ejercicios de la clase del 11/12/2023

1.– Se desea resolver el problema de contorno formado por la ecuación diferencial ordinaria y las condiciones siguientes

$$u'' = h(x), \quad 0 < x < L; \qquad u(0) = 0, \quad u(L) = 0;$$

para distintas funciones $h(x)$. Para ello se decide desarrollar una expresión integral que de forma genérica incluya a la función $h(x)$, de modo que se pueda disponer rápidamente de la solución del problema de contorno, sin necesidad de resolver la ecuación diferencial cada vez.

Obtener la "función de influencia" o función de Green $G(s, x)$ de la ecuación diferencial, y demostrar que su solución viene dada por

$$y(x) = \int_{s=0}^{s=L} f(s)\, G(s, x)\, ds. \tag{1}$$

Solución 1. La EDO homogénea asociada al problema anterior es $u_h'' = 0$ y su solución $u_h(x) = C_1 + C_2\, x$.

La solución particular se obtiene por variación de parámetros a partir de la expresión $u_p(x) = v_1(x) + v_2(x)\, x$. Por tanto,

$$u_p' = v_1' + v_2'\, x + v_2$$

Si se impone $v_1' + v_2'\, x = 0$, se obtiene u_p'' como

$$u_p'' = v_2'$$

Substituyendo en la ecuación no homogénea, se tiene

$$\begin{aligned} v_2' &= h(x) \\ v_1' + v_2'\, x &= 0 \end{aligned}$$

de donde resulta $v_1' = -h(x)\, x$ y $v_2' = h(x)$. En consecuencia,

$$v_1 = D_1 - \int_0^x h(s)\, s\, ds \quad \text{y} \quad v_2 = D_2 + \int_0^x h(s) ds$$

Por tanto, la solución general será $u(x) = u_h(x) + u_p(x)$ y agrupando las constantes de integración, resulta:

$$u(x) = \left[K_1 - \int_0^x h(s)\, s\, ds\right] + \left[K_2 + \int_0^x h(s) ds\right] x \tag{2}$$

Imponiendo las condiciones de contorno se pueden determinar K_1 y K_2. Así, dado que en el extremo $x = 0$ se debe satisfacer $u(0) = 0$, entonces $K_1 = 0$; y en el extremo $x = L$ se debe satisfacer $u(L) = 0$, por lo que,

$$\left[- \int_0^L h(s)\, s\, ds\right] + \left[K_2 + \int_0^L h(s) ds\right] L = 0$$

es decir,

$$K_2 = \frac{1}{L}\int_0^L h(s)\, s\, ds - \int_0^L h(s) ds$$

Sustituyendo K_1 y K_2 en (2) se obtiene la solución del problema planteado:

$$u(x) = -\int_0^x h(s)\, s\, ds + \left[\frac{1}{L}\int_0^L h(s)\, s\, ds - \int_0^L h(s) ds + \int_0^x h(s) ds\right] x$$

que a su vez

$$\begin{aligned}
u(x) &= -\int_0^x h(s)\, s\, ds + \left[\frac{1}{L}\int_0^L h(s)\, s\, ds - \int_0^x h(s) ds - \int_x^L h(s) ds + \int_0^x h(s) ds\right] x \\
&= -\int_0^x h(s)\, s\, ds + \left[\frac{1}{L}\int_0^L h(s)\, s\, ds - \int_x^L h(s) ds\right] x \\
&= -\int_0^x h(s)\, s\, ds + \left[\frac{1}{L}\int_0^x h(s)\, s\, ds + \frac{1}{L}\int_x^L h(s)\, s\, ds - \int_x^L h(s) ds\right] x \\
&= \int_0^x h(s)\left(-s + \frac{sx}{L}\right) ds + \int_x^L h(s)\left(-x + \frac{sx}{L}\right) ds \\
&= \int_0^L h(s)\, G(x,s) ds
\end{aligned}$$

siendo

$$G(x,s) = \begin{cases} -s + \dfrac{sx}{L}; & 0 < s < x \\ -x + \dfrac{sx}{L}; & x < s < L \end{cases}$$

que también se puede escribir:

$$\boxed{G(x,s) = \begin{cases} \dfrac{-s(L-x)}{L}; & 0 < s < x \\ \dfrac{-x(L-s)}{L}; & x < s < L \end{cases}}$$

2.– Se desea resolver el problema de contorno formado por la ecuación diferencial ordinaria y las condiciones siguientes

$$u'' + u = h(x), \quad 0 < x < L; \qquad u(0) = 0, \quad u(L) = 0; \quad L \neq n\pi, \quad n \in \mathbb{N},$$

para distintas funciones $h(x)$. Para ello se decide desarrollar una expresión integral que de forma genérica incluya a la función $h(x)$, de modo que se pueda disponer rápidamente de la solución del problema de contorno, sin necesidad de resolver la ecuación diferencial cada vez.

Obtener la "función de influencia" o función de Green $G(s,x)$ de la ecuación diferencial, y demostrar que su solución viene dada por

$$y(x) = \int_{s=0}^{s=L} f(s)\, G(s,x)\, ds; \qquad L \neq n\pi, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Solución 2. La EDO homogénea asociada al problema anterior es $u_h'' + u_h = 0$ y su solución $u_h(x) = C_1 \operatorname{sen}(x) + C_2 \cos(x)$.

La solución particular se obtiene por variación de parámetros a partir de la expresión $u_p(x) = v_1(x)\operatorname{sen}(x) + v_2(x)\cos(x)$. Por tanto,

$$u_p' = v_1' \operatorname{sen}(x) + v_2' \cos(x) + v_1 \cos(x) - v_2 \sin(x)$$

Si se impone $v_1' \operatorname{sen}(x) + v_2' \cos(x) = 0$, se obtiene u_p'' como

$$u_p'' = v_1' \cos(x) - v_2' \operatorname{sen}(x) - v_1 \operatorname{sen}(x) - v_2 \cos(x)$$

Substituyendo en la ecuación no homogénea, se tiene

$$\begin{aligned} v_1' \cos(x) - v_2' \operatorname{sen}(x) &= h(x) \\ v_1' \operatorname{sen}(x) + v_2' \cos(x) &= 0 \end{aligned}$$

de donde resulta $v_1' = h(x)\cos(x)$ y $v_2' = -h(x)\operatorname{sen}(x)$. En consecuencia,

$$v_1 = K_1 + \int_0^x h(s)\cos(s)ds \quad \text{y} \quad v_2 = K_2 - \int_0^x h(s)\operatorname{sen}(s)ds$$

Por tanto, la solución general será:

$$u(x) = \left[K_1 + \int_0^x h(s)\cos(s)ds\right]\operatorname{sen}(x) + \left[K_2 - \int_0^x h(s)\operatorname{sen}(s)ds\right]\cos(x)$$

Imponiendo las condiciones de contorno se determinan K_1 y K_2 y se obtiene la solución

$$u(x) = \frac{\operatorname{sen}(x-L)}{\operatorname{sen}(L)} \int_0^x h(s)\operatorname{sen}(s)ds + \frac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}(L)} \int_x^L h(s)\operatorname{sen}(s-L)ds = \int_0^L h(s)G(x,s)ds$$

siendo

$$\boxed{G(x,s) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x-L)\operatorname{sen}(s)}{\operatorname{sen}(L)}; & 0 < s < x \\ \dfrac{\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(s-L)}{\operatorname{sen}(L)}; & x < s < L \end{cases}}$$