Ejercicio propuesto en la clase del 11/12/2023

1.– Considérese el siguiente problema parabólico:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x,t); \quad 0 < x < L, \quad t > 0;\\
&u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, \quad t \geq 0;\\
&u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L;
\end{aligned}$$

donde las funciones $f(x)$ y $Q(x,t)$ son conocidas. A partir de la solución de este problema por desarrollo en funciones propias, escribir la solución $u(x,t)$ como la suma de las contribuciones de la condición inicial y del término fuente de la ecuación diferencial por sus correspondientes funciones de influencia.

Solución 1. La solución de este caso por desarrollo en funciones propias es:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\phi_n(x) \tag{1}$$

siendo $u_n(t)$

$$u_n(t) = e^{\lambda_n t}\left(K_n + \int_{\tau=0}^{\tau=t} q_n(\tau)e^{-\lambda_n \tau} d\tau\right) \tag{2}$$

donde K_n y $q_n(t)$ son respectivamente

$$K_n = \frac{(f,\phi_n)}{(\phi_n,\phi_n)}, \qquad q_n(t) = \frac{(Q,\phi_n)}{(\phi_n,\phi_n)} \tag{3}$$

Los valores propios λ_n y las funciones propias ϕ_n son:

$$\lambda_n = -\mu_n^2, \quad \mu_n = \frac{n\pi}{L}, \quad \phi_n = \sin(\mu_n x), \forall n \in \mathbb{N} \tag{4}$$

Los términos K_n y $q_n(t)$ se pueden también escribir:

$$K_n = \frac{2}{L}\int_{s=0}^{s=L} f(s)\sin(\mu_n s) ds; \quad q_n(t) = \frac{2}{L}\int_{s=0}^{s=L} Q(s,t)\sin(\mu_n s) ds \tag{5}$$

que sustituyendo en (2) resulta:

$$u_n(t) = e^{-\mu_n^2 t}\left(\frac{2}{L}\int_{s=0}^{s=L} f(s)\sin(\mu_n s)ds + \int_{\tau=0}^{\tau=t}\left[\frac{2}{L}\int_{s=0}^{s=L} Q(s,\tau)\sin(\mu_n s)ds\right] e^{\mu_n^2 \tau} d\tau\right) \tag{6}$$

La expresión (6) corresponde a los coeficientes $u_n(t)$ de la serie (1) que constituye la solución, que podemos escribir como la suma de dos series:

$$\begin{aligned}
u(x,t) =& \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\mu_n^2 t}\left(\frac{2}{L}\int_{s=0}^{s=L} f(s)\sin(\mu_n s)ds\right)\sin(\mu_n x)\\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\mu_n^2 t}\left(\int_{\tau=0}^{\tau=t}\left[\frac{2}{L}\int_{s=0}^{s=L} Q(s,\tau)\sin(\mu_n s)ds\right] e^{\mu_n^2 \tau}d\tau\right)\sin(\mu_n x)
\end{aligned} \tag{7}$$

es decir:

$$\begin{aligned}
u(x,t) =& \int_{s=0}^{s=L} f(s)\left(\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sin(\mu_n s)\sin(\mu_n x)e^{-\mu_n^2 t}\right]\right) ds\\
&+ \int_{\tau=0}^{\tau=t}\int_{s=0}^{s=L} Q(s,\tau)\left(\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sin(\mu_n s)\sin(\mu_n x)e^{-\mu_n^2 (t-\tau)}\right]\right) ds\, d\tau
\end{aligned} \tag{8}$$

Por consiguiente, la solución del problema planteado se puede escribir como la suma de las contribuciones debida a la condición inicial $f(x)$ y la debida al témino fuente $Q(x,t)$ de la ecuación diferencial:

$$u(x,t) = \int_{s=0}^{s=L} f(s)G(x,t;s)ds + \int_{\tau=0}^{\tau=t} \int_{s=0}^{s=L} Q(s,\tau)G(x,t-\tau;s)ds\, d\tau \tag{9}$$

siendo $G(x,t;s)$ la función de influencia:

$$G(x,t;s) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sin(\mu_n s) \sin(\mu_n x) e^{-\mu_n^2 t} \right] \tag{10}$$
