

Ejercicios de la clase del 5/12/2023

- 1.— Transformar el siguiente problema parabólico en un problema homogéneo mediante una función de referencia:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x, t); & 0 < x < L, \quad t > 0; \\ u(0, t) &= u_0(t), \quad \frac{\partial u(L, t)}{\partial x} = q_L(t), & t \geq 0; \\ u(x, 0) &= f(x), & 0 \leq x \leq L; \end{aligned} \tag{1.1}$$

Solución 1. Denominemos $r(x, t)$ a una “función de referencia” que verifique las condiciones de contorno, esto es $r(0, t) = u_0(t)$, $\frac{\partial r(L, t)}{\partial x} = q_L(t)$. Entonces el problema planteado se puede reescribir en términos de una nueva función incógnita v como $u(x, t) = v(x, t) + r(x, t)$ que satisface el problema homogéneo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Q(x, t) + k \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} - \frac{\partial r}{\partial t}; & 0 < x < L, \quad t > 0; \\ v(0, t) &= 0, \quad \frac{\partial v(L, t)}{\partial x} = 0, & t \geq 0; \\ v(x, 0) &= f(x) - r(x, 0), & 0 \leq x \leq L; \end{aligned} \tag{1.2}$$

Una función $r(x, t)$ que verifica $r(0, t) = u_0(t)$, $\frac{\partial r(L, t)}{\partial x} = q_L(t)$ es por ejemplo:

$$r(x, t) = u_0(t) + x q_L(t)$$

o también

$$r(x, t) = u_0(t) + x^2 \frac{q_L(t)}{2L}$$

Obviamente depende de qué función se elija el problema homogéneo transformado (1.2) resulta de menor o mayor complejidad. Obsérvese que en el nuevo problema aparecen las derivadas temporal y espacial en el término independiente de la ecuación diferencial.

- 2.— Transformar el siguiente problema parabólico en un problema homogéneo mediante una función de referencia:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x, t); & 0 < x < L, \quad t > 0; \\ u(0, t) &= u_0(t), \quad \alpha u(L, t) + \beta \frac{\partial u(L, t)}{\partial x} = q_L(t), & t \geq 0; \\ u(x, 0) &= f(x), & 0 \leq x \leq L; \end{aligned} \tag{2.1}$$

Solución 2. Denominemos $r(x, t)$ a una “función de referencia” que verifique las condiciones de contorno, esto es $r(0, t) = u_0(t)$, $\alpha r(L, t) + \beta \frac{\partial r(L, t)}{\partial x} = q_L(t)$. Entonces el problema planteado se puede reescribir en términos de una nueva función incógnita v como $u(x, t) = v(x, t) + r(x, t)$ que satisface el problema homogéneo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Q(x, t) + k \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} - \frac{\partial r}{\partial t}; & 0 < x < L, \quad t > 0; \\ v(0, t) &= 0, \quad \alpha v(L, t) + \beta \frac{\partial v(L, t)}{\partial x} = 0, & t \geq 0; \\ v(x, 0) &= f(x) - r(x, 0), & 0 \leq x \leq L; \end{aligned} \tag{1.2}$$

Una función $r(x, t)$ que verifica $r(0, t) = u_0(t)$, $\alpha r(L, t) + \beta \frac{\partial r(L, t)}{\partial x} = q_L(t)$ es por ejemplo:

$$r(x, t) = u_0(t) + x \frac{q_L(t) - \alpha u_0(t)}{\alpha L + \beta}$$

3.— Considérese el siguiente problema hiperbólico :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + W(x, t); & 0 < x < L, \quad t > 0; \\ u(0, t) &= 0, \quad \frac{\partial u(L, t)}{\partial x} = 0, & t \geq 0; \\ u(x, 0) &= f(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = g(x), & 0 \leq x \leq L;\end{aligned}$$

donde las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son conocidas. Obtener $u(x, t)$.

Solución 3. Las funciones propias se obtienen del problema de contorno ($\phi'' - \lambda\phi = 0$, $\phi(0) = 0$, $\phi'(L) = 0$) correspondiente al problema homogéneo asociado y vienen dadas por

$$\lambda_n = -\mu_n^2; \quad \mu_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L}, \quad \phi_n(x) = \sin(\mu_n x), \quad n = 1, 2, \dots;$$

A continuación, planteando la solución $u(x, t)$ como una serie generalizada de las funciones propias anteriores ϕ_n en la forma:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \phi_n(x)$$

se obtiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d^2 a_n(t)}{dt^2} + \mu_n^2 c^2 a_n(t) - \omega_n(t) \right) \phi_n(x) = 0$$

siendo $\omega_n(t)$ el coeficiente de Fourier del desarrollo en serie de las funciones propias de la función $W(x, t)$:

$$\omega_n(t) = \frac{(W, \phi_n)}{(\phi_n, \phi_n)} = \frac{\int_0^L W(s, t) \phi_n(s) ds}{\int_0^L \phi_n^2(s) ds}$$

En consecuencia los coeficientes $a_n(t)$ se obtienen de resolver la ecuación diferencial de segundo orden lineal

$$\frac{d^2 a_n(t)}{dt^2} + \mu_n^2 c^2 a_n(t) - \omega_n(t) = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

cuya solución general es

$$a_n(t) = C_n \sin(\mu_n c t) + D_n \cos(\mu_n c t) + \frac{1}{\mu_n c} \int_0^t \omega_n(\tau) \sin(\mu_n c(t - \tau)) d\tau$$

Los coeficientes C_n y D_n se obtienen de la imposición de las condiciones iniciales dadas por las ecuaciones $u(x, 0) = f(x)$ y $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = g(x)$:

$$C_n = \frac{1}{\mu_n c} \frac{(g, \phi_n)}{(\phi_n, \phi_n)} = \frac{1}{\mu_n c} \frac{\int_0^L g(s) \phi_n(s) ds}{\int_0^L \phi_n^2(s) ds}; \quad D_n = \frac{(f, \phi_n)}{(\phi_n, \phi_n)} = \frac{\int_0^L f(s) \phi_n(s) ds}{\int_0^L \phi_n^2(s) ds}$$

4.— Considérese el siguiente problema hiperbólico :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + W(x, t); & 0 < x < L, \quad t > 0; \\ \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} &= \alpha(t), \quad \frac{\partial u(L, t)}{\partial x} = \beta(t), & t \geq 0; \\ u(x, 0) &= f(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = g(x), & 0 \leq x \leq L;\end{aligned}$$

donde las funciones $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $f(x)$ y $g(x)$ son conocidas. Obtener $u(x, t)$.

Solución 4. Este caso corresponde a un problema con condiciones de contorno no-homogéneas. Si se efectúa un cambio de la función incógnita

$$u(x, t) = v(x, t) + r(x, t)$$

mediante una “función de referencia” $r(x, t)$ definida de modo que satisfaga

$$\frac{\partial r(0, t)}{\partial x} = \alpha(t), \quad \frac{\partial r(L, t)}{\partial x} = \beta(t)$$

por ejemplo:

$$r(x, t) = \left(\frac{\beta(t) - \alpha(t)}{2L} x + \alpha(t) \right) x$$

entonces el problema original se reduce a uno con condiciones de contorno homogéneas

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \widetilde{W}(x, t); & 0 < x < L, \quad t > 0; \\ \frac{\partial v(0, t)}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial v(L, t)}{\partial x} = 0, & t \geq 0; \\ v(x, 0) &= \widetilde{f}(x), \quad \frac{\partial v(x, 0)}{\partial t} = \widetilde{g}(x), & 0 \leq x \leq L;\end{aligned}$$

siendo

$$\widetilde{W}(x, t) = W(x, t) + c^2 \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 r}{\partial t^2}; \quad \widetilde{f}(x) = f(x) - r(x, 0); \quad \widetilde{g}(x) = g(x) - \frac{\partial r(x, 0)}{\partial t}$$

A partir de este punto se procede a la obtención de la función $v(x, t)$ por desarrollo en funciones propias: Las funciones propias se obtienen del problema de contorno ($\phi'' - \lambda\phi = 0$, $\phi'(0) = 0$, $\phi'(L) = 0$) correspondiente al problema homogéneo asociado y vienen dadas por

$$\begin{cases} \lambda_0 = 0; & \phi_0(x) = 1; \\ \lambda_n = -\mu_n^2; & \mu_n = \frac{n\pi}{L}, \quad \phi_n(x) = \cos(\mu_n x), \quad n = 1, 2, \dots; \end{cases}$$

es decir,

$$\lambda_n = -n^2 \pi^2 / L^2; \quad \phi_n(x) = \cos(n\pi x / L), \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

A continuación, planteando la solución $v(x, t)$ como una serie generalizada de las funciones propias anteriores ϕ_n en la forma:

$$v(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) \phi_n(x)$$

se obtiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{d^2 a_n(t)}{dt^2} + \frac{n^2 \pi^2 c^2}{L^2} a_n(t) - \omega_n(t) \right) \phi_n(x) = 0$$

siendo $\omega_n(t)$ el coeficiente de Fourier del desarrollo en serie de las funciones propias de la función $\widetilde{W}(x, t)$:

$$\omega_n(t) = \frac{(\widetilde{W}, \phi_n)}{(\phi_n, \phi_n)} = \frac{\int_0^L \widetilde{W}(s, t) \phi_n(s) ds}{\int_0^L \phi_n^2(s) ds}$$

En consecuencia los coeficientes $a_n(t)$ se obtienen de resolver la ecuación diferencial de segundo orden lineal

$$\frac{d^2 a_n(t)}{dt^2} + \frac{n^2 \pi^2 c^2}{L^2} a_n(t) - \omega_n(t) = 0; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

cuya solución general es, según sea el valor de n :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0(t) = C_0 t + D_0 + \int_0^t \omega_n(\tau) (t - \tau) d\tau; \quad n = 0 \\ a_n(t) = C_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + D_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + \frac{L}{n\pi c} \int_0^t \omega_n(\tau) \sin\left(\frac{n\pi c(t - \tau)}{L}\right) d\tau; \quad n = 1, 2, \dots \end{array} \right.$$

Los coeficientes C_0 , D_0 , C_n y D_n se obtienen de la imposición de las condiciones iniciales dadas por las ecuaciones $v(x, 0) = \widetilde{f}(x)$ y $\frac{\partial v(x, 0)}{\partial t} = \widetilde{g}(x)$:

$$C_0 = \frac{(\widetilde{g}, \phi_0)}{(\phi_0, \phi_0)} = \frac{1}{L} \int_0^L \widetilde{g}(s) ds; \quad D_0 = \frac{(\widetilde{f}, \phi_0)}{(\phi_0, \phi_0)} = \frac{1}{L} \int_0^L \widetilde{f}(s) ds$$

$$C_n = \frac{L}{n\pi c} \frac{(\widetilde{g}, \phi_n)}{(\phi_n, \phi_n)} = \frac{L}{n\pi c} \frac{\int_0^L \widetilde{g}(s) \phi_n(s) ds}{\int_0^L \phi_n^2(s) ds}; \quad D_n = \frac{(\widetilde{f}, \phi_n)}{(\phi_n, \phi_n)} = \frac{\int_0^L \widetilde{f}(s) \phi_n(s) ds}{\int_0^L \phi_n^2(s) ds}$$
