

Ejercicios propuestos en la clase del 4/12/2023

1.— Considérese el siguiente problema parabólico en un rectángulo de dimensiones $L \times H$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= k\Delta u; & 0 < x < L, & \quad 0 < y < H, & \quad t > 0; \\ \frac{\partial u(0, y, t)}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial u(L, y, t)}{\partial x} &= 0, & \quad 0 \leq y \leq H, & \quad t \geq 0; \\ u(x, 0, t) &= 0, & u(x, H, t) &= 0, & \quad 0 \leq x \leq L, & \quad t \geq 0; \\ u(x, y, 0) &= f(x, y), & 0 \leq x \leq L, & \quad 0 \leq y \leq H; \end{aligned}$$

donde la función $f(x, y)$ es conocida. Obtener $u(x, y, t)$.

Solución 1. Este caso se puede resolver por separación de variables planteando que $u(x, y, t) = \phi(x, y)T(t)$ que conduce a las ecuaciones separadas siguientes (incluyendo la separación de las condiciones de contorno):

$$\begin{aligned} \Delta\phi - \lambda\phi &= 0; & \frac{\partial\phi(0, y)}{\partial x} &= \frac{\partial\phi(L, y)}{\partial x} = 0, & \quad \phi(x, 0) &= \phi(x, H) = 0 \\ \frac{dT}{dt} - \lambda kT &= 0; \end{aligned}$$

El ecuación de Helmholtz $\Delta\phi - \lambda\phi = 0$ con las condiciones de contorno homogéneas $\frac{\partial\phi(0, y)}{\partial x} = \frac{\partial\phi(L, y)}{\partial x} = \phi(x, 0) = \phi(x, H) = 0$ constituye un problema de autovalores y autofunciones. Éstas se pueden obtener por separación de variables en la forma $\phi(x, y) = X(x)Y(y)$ de modo que resultan los autovalores y funciones propias siguientes:

$$\lambda_{mn} = -\left(\frac{n^2}{L^2} + \frac{m^2}{H^2}\right)\pi^2, \quad \phi_{mn}(x, y) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{H}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad m = 1, 2, \dots$$

(Nótese que la función propia asociada al valor propio nulo en la dirección x , que es una constante, se ha incluido en el conjunto $\cos(n\pi x/L)$, ya que $n = 0, 1, 2, \dots$).

En consecuencia, resolviendo asimismo la ecuación en la variable t , la solución se puede escribir como una serie generalizada de Fourier de las funciones propias ϕ_{mn} en la forma:

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} T_{mn}(t)\phi_{mn}(x, y)$$

esto es,

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(C_{m0} + \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right) \sin\left(\frac{m\pi y}{H}\right) e^{-(m^2/H^2 + n^2/L^2)\pi^2 kt}$$

Los coeficientes C_{m0} y C_{mn} se obtienen de imponer la condición inicial $u(x, y, 0) = f(x, y)$, obteniéndose

$$\begin{aligned} C_{m0} &= \frac{2}{LH} \int_0^L \int_0^H f(\xi, \eta) \sin\left(\frac{m\pi\eta}{H}\right) d\xi d\eta \\ C_{mn} &= \frac{4}{LH} \int_0^L \int_0^H f(\xi, \eta) \cos\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi\eta}{H}\right) d\xi d\eta \end{aligned}$$

2.— Considérese el siguiente problema hiperbólico en un rectángulo de dimensiones $L \times H$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \Delta u; & 0 < x < L, & \quad 0 < y < H, & \quad t > 0; \\ u(0, y, t) &= 0, & u(L, y, t) &= 0, & \quad 0 \leq y \leq H, & \quad t \geq 0; \\ u(x, 0, t) &= 0, & u(x, H, t) &= 0, & \quad 0 \leq x \leq L, & \quad t \geq 0; \\ u(x, y, 0) &= f(x, y), & 0 \leq x \leq L, & \quad 0 \leq y \leq H; \\ \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} &= g(x, y), & 0 \leq x \leq L, & \quad 0 \leq y \leq H; \end{aligned}$$

donde las funciones $f(x, y)$ y $g(x, y)$ son conocidas. Obtener $u(x, y, t)$.

Solución 2. Este caso se puede resolver por separación de variables planteando que $u(x, y, t) = \phi(x, y)T(t)$ que conduce a las ecuaciones separadas siguientes (incluyendo la separación de las condiciones de contorno):

$$\begin{aligned} \Delta \phi - \lambda \phi &= 0; & \phi(0, y) &= \phi(L, y) = 0, & \quad \phi(x, 0) &= \phi(x, H) = 0 \\ \frac{d^2 T}{dt^2} - \lambda c^2 T &= 0; \end{aligned}$$

El ecuación de Helmholtz $\Delta \phi - \lambda \phi = 0$ con las condiciones de contorno homogéneas $\phi(0, y) = \phi(L, y) = \phi(x, 0) = \phi(x, H) = 0$ constituye un problema de autovalores y autofunciones. Éstas se pueden obtener por separación de variables en la forma $\phi(x, y) = X(x)Y(y)$ de modo que resultan los autovalores y funciones propias siguientes:

$$\lambda_{mn} = - \left(\frac{n^2}{L^2} + \frac{m^2}{H^2} \right) \pi^2, \quad \phi_{mn}(x, y) = \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \sin \left(\frac{m\pi y}{H} \right), \quad n \in \mathbb{N}; \quad m \in \mathbb{N}$$

En consecuencia, resolviendo asimismo la ecuación en la variable t , la solución se puede escribir como una serie generalizada de Fourier de las funciones propias ϕ_{mn} en la forma:

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{mn}(t) \phi_{mn}(x, y)$$

esto es,

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [A_{mn} \sin(\alpha_{mn} \pi c t) + B_{mn} \cos(\alpha_{mn} \pi c t)] \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \sin \left(\frac{m\pi y}{H} \right)$$

siendo $\alpha_{mn} = \sqrt{m^2/H^2 + n^2/L^2}$.

Los coeficientes A_{mn} y B_{mn} se obtienen de imponer las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} A_{mn} &= \frac{4}{LH(\alpha_{mn} \pi c)} \int_0^L \int_0^H g(\xi, \eta) \sin \left(\frac{n\pi \xi}{L} \right) \sin \left(\frac{m\pi \eta}{H} \right) d\xi d\eta \\ B_{mn} &= \frac{4}{LH} \int_0^L \int_0^H f(\xi, \eta) \sin \left(\frac{n\pi \xi}{L} \right) \sin \left(\frac{m\pi \eta}{H} \right) d\xi d\eta \end{aligned}$$