Ejercicios propuestos de la clase del 4/12/2023

1.– Considérese el siguiente Problema Interior de Neumann con condiciones de contorno prescritas en un círculo de radio R:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0; \qquad 0 < r < R, \quad 0 \le \theta \le 2\pi;$$
$$\frac{\partial u(R,\theta)}{\partial r} = g(\theta), \qquad 0 \le \theta \le 2\pi;$$

donde la función $g(\theta)$ es conocida. Obtener $u(r,\theta)$ y una fórmula integral de Poisson. La función $g(\theta)$ además de ser continua a trozos, ¿debe satisfacer alguna condición adicional?

Solución 1. La solución formal en serie generalizada de Fourier es la misma que en el caso del problema interior de Dirichlet, esto es, tras separar variables, introducir condiciones periódicas y una condición de singularidad y obtener las funciones propias, la solución $u(r,\theta)$ se puede escribir en la forma:

$$u(r,\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta) \right) r^n \right]$$

Los coeficientes A_n y B_n se obtienen de imponer la condición de contorno $\dfrac{\partial u(R,\theta)}{\partial r} = g(\theta)$, es decir,

$$A_n = \frac{1}{nR^{n-1}\pi} \int_0^{2\pi} g(s)\cos(ns)ds; \qquad B_n = \frac{1}{nR^{n-1}\pi} \int_0^{2\pi} g(s)\sin(ns)ds$$

y la constante A_0 está indeterminada. En consecuencia, este problema no tiene solución única al depender de una constante arbitraria.

Por otra parte, la segunda identidad de Green establece que para cualesquiera funciones $v, w \in \mathcal{C}^2$, en un dominio Ω de contorno Γ se verifica

$$\int_\Omega (v\Delta w - w\Delta v) d\Omega = \int_\Gamma \left(v\frac{\partial w}{\partial n} - w\frac{\partial v}{\partial n} \right) d\Gamma$$

siendo $\dfrac{\partial w}{\partial n} = \mathbf{n}^T \cdot \mathbf{grad}(w)$ y $\mathbf{n}$ el versor normal exterior en cada punto del contorno Γ. Aplicando esta identidad al problema planteado eligiendo $v = 1$ y $w = u$, se obtiene

$$\int_\Omega \Delta u \, d\Omega = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma \quad \underset{\Delta u = 0}{\longrightarrow} \quad 0 = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma \quad \longrightarrow \quad 0 = R\int_0^{2\pi} \frac{\partial u(R,\theta)}{\partial r} d\theta$$

y teniendo en cuenta que la condición de contorno es $\dfrac{\partial u(R,\theta)}{\partial r} = g(\theta)$ resulta que la función $g(\theta)$ debe satisfacer la "condición de compatibilidad"

$$\int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta = 0$$

Finalmente una fórmula integral se puede obtener de sustituir los coeficientes A_n y B_n en la serie generalizada de Fourier y compactar la expresión resultante:

$$u(r,\theta) = A_0 + \frac{R}{\pi} \int_0^{2\pi} g(s) \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n(\theta - s))}{n} \left(\frac{r}{R} \right)^n \right] ds$$

En este caso el núcleo integral es la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(n(\theta - s))}{n} \left(\dfrac{r}{R} \right)^n$

2.– Considérese el siguiente Problema Exterior de Neumann con condiciones de contorno prescritas en un círculo de radio R:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0; \qquad R<r<\infty,\quad 0\le\theta\le 2\pi;$$
$$\frac{\partial u(R,\theta)}{\partial r}=g(\theta), \qquad 0\le\theta\le 2\pi;$$

donde la función $g(\theta)$ es conocida. Obtener $u(r,\theta)$ y una fórmula integral de Poisson. La función $g(\theta)$ además de ser continua a trozos, ¿debe satisfacer alguna condición adicional?

Solución 2. La solución formal en serie generalizada de Fourier es la misma que en el caso del problema exterior de Dirichlet, esto es, tras separar variables, introducir condiciones periódicas y condiciones de normalidad en infinito y obtener las funciones propias, la solución $u(r,\theta)$ se puede escribir en la forma:

$$u(r,\theta)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(A_n\cos(n\theta)+B_n\sin(n\theta)\right)\frac{1}{r^n}\right]$$

Los coeficientes A_n y B_n se obtienen de imponer la condición de contorno $\dfrac{\partial u(R,\theta)}{\partial r}=g(\theta)$, es decir,

$$A_n=\frac{-R^{n+1}}{n\pi}\int_0^{2\pi}g(s)\cos(ns)ds; \qquad B_n=\frac{-R^{n+1}}{n\pi}\int_0^{2\pi}g(s)\sin(ns)ds$$

y la constante A_0 está indeterminada. En consecuencia, este problema no tiene solución única al depender de una constante arbitraria.

Por otra parte, de la segunda identidad de Green se demuestra que la función $g(\theta)$ debe satisfacer la “condición de compatibilidad”

$$\int_0^{2\pi}g(\theta)d\theta=0$$

Finalmente una fórmula integral se puede obtener de sustituir los coeficientes A_n y B_n en la serie generalizada de Fourier y compactar la expresión resultante:

$$u(r,\theta)=A_0-\frac{R}{\pi}\int_0^{2\pi}g(s)\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n(\theta-s))}{n}\left(\frac{R}{r}\right)^n\right]ds$$

En este caso el núcleo integral es la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(n(\theta-s))}{n}\left(\dfrac{R}{r}\right)^n$

3.– Considérese el siguiente Problema Interior de Dirichlet en un cubo de dimensiones $\pi\times\pi\times\pi$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0; \qquad 0<x<\pi,\quad 0<y<\pi,\quad 0<z<\pi;$$
$$u(0,y,z)=0,\quad u(\pi,y,z)=0,\quad 0\le y\le\pi,\quad 0\le z\le\pi;$$
$$u(x,0,z)=0,\quad u(x,\pi,z)=0,\quad 0\le x\le\pi,\quad 0\le z\le\pi;$$
$$u(x,y,0)=f(x,y),\quad u(x,y,\pi)=0,\quad 0\le x\le\pi,\quad 0\le y\le\pi;$$

donde la función $f(x,y)$ es conocida. Obtener $u(x,y,z)$.

Solución 3. Este caso se puede resolver por separación de variables planteando que $u(x,y,z)=X(x)Y(y)Z(z)$ que conduce a las ecuaciones separadas siguientes (incluyendo la separación de las condiciones de contorno homogéneas $u(0,y,z)=0$, $u(\pi,y,z)=0$, $u(x,0,z)=0$, $u(x,\pi,z)=0$):

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2X}{x^2}+\lambda X=0; \qquad X(0)=0,\;\; X(\pi)=0\\
&\frac{d^2Y}{y^2}-\widetilde{\lambda}Y=0; \qquad Y(0)=0,\;\; Y(\pi)=0\\
&\frac{d^2Z}{z^2}-(\lambda-\widetilde{\lambda})Z=0;
\end{aligned}$$

de donde se obtienen las constantes de separación λ y $\widetilde{\lambda}$ y las correspondientes funciones propias asociadas:

$$\lambda=+n^2,\;\; X_n(x)=\sin(nx), \quad \forall n\in\mathbb{N}; \qquad \widetilde{\lambda}=-m^2,\;\; Y_m(y)=\sin(my), \quad \forall m\in\mathbb{N}.$$

En consecuencia, resolviendo asimismo la ecuación en la variable z, la solución se puede escribir como una serie generalizada de Fourier de las funciones propias en la forma:

$$u(x,y,z)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_{mn}e^{+\sqrt{m^2+n^2}z}+B_{mn}e^{-\sqrt{m^2+n^2}z}\right)\sin(nx)\sin(my)$$

Los coeficientes A_{mn} y B_{mn} se obtienen de imponer las condiciones de contorno correspondientes a los planos en $z=0$ y $z=\pi$, esto es, $u(x,y,0)=f(x,y)$ y $u(x,y,\pi)=0$. Concretamente, la condición $u(x,y,\pi)=0$ conduce a la relación entre los dichos coeficientes:

$$B_{mn}=-A_{mn}e^{+2\sqrt{m^2+n^2}\pi}$$

por lo que

$$u(x,y,z)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}\left(e^{+\sqrt{m^2+n^2}z}-e^{-\sqrt{m^2+n^2}(z-2\pi)}\right)\sin(nx)\sin(my)$$

o lo que es lo mismo

$$u(x,y,z)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(2A_{mn}e^{+\sqrt{m^2+n^2}\pi}\right)\left(\frac{e^{+\sqrt{m^2+n^2}(z-\pi)}-e^{-\sqrt{m^2+n^2}(z-\pi)}}{2}\right)\sin(nx)\sin(my)$$

Agrupando en una única constante $\widetilde{A}_{mn}$ el producto $2A_{mn}e^{+\sqrt{m^2+n^2}\pi}$ la expresión anterior se puede reescribir como

$$u(x,y,z)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_{mn}\,\mathrm{Sh}\left(\sqrt{m^2+n^2}(z-\pi)\right)\sin(nx)\sin(my)$$

Finalmente, la condición $u(x,y,0)=f(x,y)$ permite obtener el coeficiente $\widetilde{A}_{mn}$ dado que debe verificarse

$$f(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_{mn}\,\mathrm{Sh}\left(-\sqrt{m^2+n^2}\pi\right)\sin(nx)\sin(my)$$

esto es,

$$\widetilde{A}_{mn}=\frac{1}{\mathrm{Sh}\left(-\sqrt{m^2+n^2}\pi\right)}\,\frac{\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}f(\xi,\eta)\sin(n\xi)\sin(m\eta)\,d\xi\,d\eta}{\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2(n\xi)\sin^2(m\eta)\,d\xi\,d\eta}$$

La solución final es

$$u(x,y,z)=\frac{4}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_{mn}\frac{\mathrm{Sh}\left(\sqrt{m^2+n^2}(z-\pi)\right)}{\mathrm{Sh}\left(-\sqrt{m^2+n^2}\pi\right)}\sin(nx)\sin(my)$$

donde α_{mn} se calcula mediante la integral doble

$$\alpha_{mn}=\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} f(\xi,\eta)\sin(n\xi)\sin(m\eta)\,d\xi\,d\eta$$

FINALMENTE, PARA PENSAR UN POCO...

4.– Considérese el siguiente Problema Interior de Dirichlet en un disco anular de radio interior R_I y radio exterior R_E:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0; \qquad R_I<r<R_E,\quad 0\le\theta\le 2\pi;\\ &u(R_I,\theta)=f_I(\theta),\qquad 0\le\theta\le 2\pi;\quad u(R_E,\theta)=f_E(\theta),\qquad 0\le\theta\le 2\pi;\end{aligned}$$

donde las funciones $f_I(\theta)$ y $f_E(\theta)$ son conocidas. Obtener $u(r,\theta)$.

5.– Considérese el siguiente Problema Interior de Neumann en un rectángulo de dimensiones $L\times H$:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0; \qquad 0<x<L,\quad 0<y<H;\\ &\frac{\partial u(0,y)}{\partial x}=f_0(y),\quad \frac{\partial u(L,y)}{\partial x}=f_L(y),\quad 0\le y\le H;\\ &\frac{\partial u(x,0)}{\partial y}=g_0(x),\quad \frac{\partial u(x,H)}{\partial y}=g_H(y),\quad 0\le x\le L.\end{aligned}$$

donde las funciones $f_0(y)$, $f_L(y)$, $g_0(x)$ y $g_H(x)$ son conocidas. ¿Cuál es la condición de compatibilidad que debe satisfacerse en este caso?