Ejercicios propuestos de la clase del 28/11/2023

1.– Considérese el siguiente Problema Interior de Dirichlet con condiciones de contorno prescritas en un círculo de radio unidad:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0; \qquad 0 < r < 1, \quad 0 \le \theta \le 2\pi;$$
$$u(1,\theta) = f(\theta), \qquad 0 \le \theta \le 2\pi;$$

donde la función $f(\theta)$ es conocida. Obtener una fórmula integral de Poisson.

Solución 1. De acuerdo con lo visto en clase, tras separar variables, introducir condiciones periódicas y obtener las funciones propias, la solución $u(r,\theta)$ se puede escribir en serie generalizada de Fourier en la forma:

$$u(r,\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta))\, r^n \right]$$

y los coeficientes vienen dados por

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)ds; \qquad A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(s)\cos(ns)ds; \qquad B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(s)\sin(ns)ds$$

Se denomina "fórmula integral de Poisson" a la expresión resultante de sustituir los coeficientes en la serie generalizada, reordenar los términos y sumar la serie. Así, si sustituimos los coeficientes y hacemos un poco de álgebra, obtendremos:

$$\begin{aligned}
u(r,\theta) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)ds + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{r^n}{\pi}\left(\int_0^{2\pi} f(s)\cos(ns)ds\cos(n\theta) + \int_0^{2\pi} f(s)\sin(ns)ds\sin(n\theta)\right)\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)ds + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(s)\left[\sum_{n=1}^{\infty} r^n\left(\cos(ns)\cos(n\theta) + \sin(ns)\sin(n\theta)\right)\right] ds \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)ds + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(s)\left[\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(n(\theta - s))\right] ds \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)ds + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(s)\left[\sum_{n=1}^{\infty} r^n \frac{e^{ni(\theta-s)} + e^{-ni(\theta-s)}}{2}\right] ds \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(re^{i(\theta-s)}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\left(re^{-i(\theta-s)}\right)^n\right] ds \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)\left[1 + \frac{re^{i(\theta-s)}}{1 - re^{i(\theta-s)}} + \frac{re^{-i(\theta-s)}}{1 - re^{-i(\theta-s)}}\right] ds \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)\left[\frac{1 - r^2}{1 - re^{i(\theta-s)} - re^{-i(\theta-s)} + r^2}\right] ds \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)\left[\frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - s) + r^2}\right] ds
\end{aligned}$$

La expresión final se conoce como "fórmula integral de Poisson" para el problema interior de Dirichlet en un círculo:

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)\, \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - s) + r^2} ds$$

2.– Considérese el siguiente Problema Exterior de Dirichlet con condiciones de contorno prescritas en un círculo de radio R:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0; \qquad R < r < \infty, \quad 0 \le \theta \le 2\pi; \\
&u(R, \theta) = f(\theta), \qquad 0 \le \theta \le 2\pi;
\end{aligned}$$

donde la función $f(\theta)$ es conocida. Obtener $u(r, \theta)$ y una fórmula integral de Poisson.

Solución 2. Este caso es análogo al problema anterior excepto que el dominio es $(R, +\infty)$ y que la ecuación diferencial ahora no es singular por lo que en este caso hay que introducir condiciones de normalidad en infinito. Tras separar variables, introducir condiciones periódicas y obtener las funciones propias, la solución $u(r, \theta)$ se puede escribir en serie generalizada de Fourier en la forma:

$$u(r, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)) \frac{1}{r^n} \right]$$

y los coeficientes vienen dados por

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) ds; \qquad A_n = \frac{R^n}{\pi} \int_0^{2\pi} f(s) \cos(ns) ds; \qquad B_n = \frac{R^n}{\pi} \int_0^{2\pi} f(s) \sin(ns) ds$$

Finalmente se puede obtener una fórmula integral de Poisson, sustituyendo los coeficientes en la serie generalizada y manipulando analíticamente la expresión resultante hasta sumar la serie, esto es:

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) \frac{1 - (R/r)^2}{1 - 2\cos(\theta - s) R/r + (R/r)^2} ds$$
