Ejercicios propuestos de la clase del 28/11/2023

1.– Considérese el siguiente problema interior de Dirichlet en un dominio rectangular $0 < x < a$, $0 < y < b$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b; \\ u(x,0) = f(x), \quad u(x,b) = 0, \quad u(0,y) = 0, \quad u(a,y) = 0 \end{cases}$$

Obtener $u(x,y)$.

Solución 1. Este problema se puede resolverse directamente por separación de variables. Así, dado que la ecuación diferencial es lineal y homogénea por lo que se puede separar en la forma

$$u(x,y) = X(x)Y(y)$$

resultando $\dfrac{X''}{X} + \dfrac{Y''}{Y} = 0$. Es decir, para determinados valores de una constante de separación λ, resultan las ecuaciones

$$X'' - \lambda X = 0$$

$$Y'' + \lambda Y = 0$$

Asimismo y dado que las condiciones de contorno en $x = 0$ y $x = a$ son también lineales y homogéneas pueden separarse en la forma $X(0) = 0$, $X(a) = 0$. En consecuencia, debemos estudiar el problema de contorno

$$X'' - \lambda X = 0, \qquad X(0) = 0, \qquad X(a) = 0$$

para el que no existen funciones propias asociadas a valores λ positivos ni nulo. Si $\lambda < 0$ existen infinitos valores propios, dados por $\lambda_n = -\mu_n^2$, y sus correspondientes funciones propias:

$$\mu_n = \frac{n\pi}{a}, \qquad X_n(x) = \sin(\mu_n x) \quad n \in \mathbb{N}$$

La resolución de la ecuación diferencial $Y'' + \lambda Y = 0$, para los distintos valores propios conduce a

$$Y'' - \mu_n^2 Y = 0 \quad \longrightarrow \quad Y_n(y) = A_n e^{\mu_n y} + B_n e^{-\mu_n y}$$

La condición de contorno $u(x,b) = 0$ es lineal y homogénea por lo que es separable: $Y(b) = 0$, por lo que aplicando esta condición a la función anterior $Y(y)$ se obtiene la relación entre los coeficientes

$$A_n e^{\mu_n b} + B_n e^{-\mu_n b} = 0 \quad \longrightarrow \quad A_n = -B_n e^{-2\mu_n b}$$

es decir,

$$Y_n(y) = B_n \left(e^{-\mu_n y} - e^{+\mu_n y - 2\mu_n b}\right) = -2B_n e^{-\mu_n b} \frac{\left(e^{+\mu_n(y-b)} - e^{-\mu_n(y-b)}\right)}{2} = \widetilde{B}_n \operatorname{Sh}(\mu_n(y-b))$$

donde $\widetilde{B}_n$ ha sido redefinida al expresar la función $Y_n(y)$ en términos del seno hiperbólico.

Teniendo en cuenta la separación de variables establecida al inicio y aplicando el principio de superposición, la solución se puede expresar como la serie de Fourier

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n Y_n$$

esto es:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{B}_n \operatorname{Sh}(\mu_n(y-b)) \sin(\mu_n x)$$

Finalmente la imposición de la condición de contorno no homogénea $u(x,0) = f(x)$ conduce a la identidad

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{B}_n \operatorname{Sh}(-\mu_n b) \sin(\mu_n x)$$

de la que se obtiene el coeficiente:

$$\widetilde{B}_n = \frac{1}{\operatorname{Sh}(-\mu_n b)} \frac{\displaystyle\int_0^a f(s) \sin(\mu_n s) ds}{\displaystyle\int_0^a \sin^2(\mu_n s) ds} = \frac{-2}{a \operatorname{Sh}(\mu_n b)} \int_0^a f(s) \sin(\mu_n s) ds$$

La solución final es

$$u(x,y) = \frac{-2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\int_0^a f(s) \sin(\mu_n s) ds \right) \frac{\operatorname{Sh}(\mu_n(y-b))}{\operatorname{Sh}(\mu_n b)} \sin(\mu_n x) \right\}$$

y sustituyendo el valor de $\mu_n = \frac{n\pi}{a}$:

$$u(x,y) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\int_0^a f(s) \sin(n\pi s/a) ds \right) \frac{\operatorname{Sh}(n\pi(b-y)/a)}{\operatorname{Sh}(n\pi b/a)} \sin(n\pi x/a) \right\}$$

2.– Considérese el siguiente problema interior de Dirichlet en un dominio rectangular $0 < x < a$, $0 < y < b$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b; \\ u(x,0) = f_1(x), \quad u(x,b) = f_2(x), \quad u(0,y) = g_1(y), \quad u(a,y) = g_2(y) \end{cases}$$

Obtener $u(x,y)$.

Solución 2. Tal como está planteado el problema no se puede aplicar directamente una separación de variables dado que, aunque el problema es lineal, todas las condiciones de contorno son no-homogéneas. Una alternativa para obtener la solución $u(x,y)$ consistiría en aplicar el principio de superposición. Así, si se descompone el problema original en los cuatro problemas siguientes:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b; \\ u_1(x,0) = f_1(x), \quad u_1(x,b) = 0, \quad u_1(0,y) = 0, \quad u_1(a,y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b; \\ u_2(x,0) = 0, \quad u_2(x,b) = f_2(x), \quad u_2(0,y) = 0, \quad u_2(a,y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b; \\ u_3(x,0) = 0, \quad u_3(x,b) = 0, \quad u_3(0,y) = g_1(y), \quad u_3(a,y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_4}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u_4}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b; \\ u_4(x,0) = 0, \quad u_4(x,b) = 0, \quad u_4(0,y) = 0, \quad u_4(a,y) = g_2(y) \end{cases}$$

las soluciones de cada uno de estos problemas se pueden obtener por separación de variables y vienen dadas por las funciones $u_1(x,y)$, $u_2(x,y)$, $u_3(x,y)$, $u_4(x,y)$. Dado que el problema es lineal, la solución $u(x,y)$ se obtiene por superposición:

$$u(x,y) = u_1(x,y) + u_2(x,y) + u_3(x,y) + u_4(x,y), \qquad 0 < x < a, \quad 0 < y < b$$

El primero de los problemas (correspondiente a $u_1(x,y)$) es el caso propuesto en el ejercicio anterior. La resolución de los tres problemas elementales restantes se lleva a cabo de forma análoga.