Ejercicios propuestos de la clase del 14/11/2023

1.– Considérese el siguiente problema de valores iniciales y de contorno gobernado por la ecuación del calor en el dominio $0 < x < L$, $t > 0$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0; \qquad u(x,0) = f(x)$$

siendo $k > 0$. Obtener la distribución de temperaturas $u(x,t)$.

Solución 1. Tras separar variables y resolver el problema de valores propios asociado, se obtiene la serie

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\pi x/L)\, e^{-(n^2\pi^2 k/L^2)t}; \qquad C_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(s)\sin(n\pi s/L)\, ds$$

2.– Considérese el siguiente problema de valores iniciales y de contorno gobernado por la ecuación de ondas en el dominio $0 < x < L$, $t > 0$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0; \qquad u(x,0) = f(x), \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(x)$$

siendo $f(x) = \begin{cases} hx/a & ;\ 0 \le x \le a \\ h(L-x)/(L-a) & ;\ a \le x \le L \end{cases}$ y $g(x) = 0$. Obtener $u(x,t)$.

Solución 2. Tras separar variables y calcular los coeficientes de Fourier de la serie resultante se obtiene

$$u(x,t) = \frac{2hL^2}{\pi^2 a(L-a)} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\sin(n\pi a/L)}{n^2} \sin(n\pi x/L)\cos(n\pi ct/L) \right\}$$

3.– Considérese el siguiente problema de valores iniciales y de contorno gobernado por la ecuación de ondas en el dominio $0 < x < L$, $t > 0$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0; \qquad u(x,0) = f(x), \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(x)$$

siendo $f(x) = 0$ y $g(x) = \begin{cases} v_0 x/a & ;\ 0 \le x \le a \\ v_0(L-x)/(L-a) & ;\ a \le x \le L \end{cases}$. Obtener $u(x,t)$.

Solución 3. Tras separar variables y calcular los coeficientes de Fourier de la serie resultante se obtiene

$$u(x,t) = \frac{2v_0 L^3}{\pi^3 ca(L-a)} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\sin(n\pi a/L)}{n^3} \sin(n\pi x/L)\sin(n\pi ct/L) \right\}$$

4.– Considérese el siguiente problema de valores iniciales y de contorno gobernado por la ecuación del calor en el dominio $0 < x < L$, $t > 0$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha u, \qquad u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0; \qquad u(x,0) = f(x)$$

siendo $k > 0$ y $\alpha > 0$. Obtener $u(x,t)$ y la solución de equilibrio.

Solución 4. Tras separar variables y resolver el problema de valores propios asociado, se obtiene la serie

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\pi x/L)\, e^{-(n^2\pi^2 k/L^2+\alpha)t}; \qquad C_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(s)\sin(n\pi s/L)\, ds$$

La solución de equilibrio, esto es, la solución al problema

$$0 = k\frac{d^2u_E}{dx^2} - \alpha u, \qquad u_E(0) = 0, \quad u_E(L) = 0$$

es obviamente $u_E(x) = 0$, que efectivamente es también el resultado de evaluar en el límite para $t \to +\infty$ la serie anterior.

5.– Considérese el siguiente problema de contorno gobernado por la ecuación de Laplace en el rectángulo $0 < x < L$, $0 < y < H$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial u(0,y)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u(L,y)}{\partial x} = 0; \qquad u(x,0) = f(x), \quad u(x,H) = 0$$

siendo $f(x)$ una función continua. Obtener $u(x,y)$.

Solución 5. Tras separar variables en la forma $u(x,t) = X(x)Y(y)$ se obtienen dos ecuaciones diferenciales separadas, una en la variable x y otra en la variable y para cierta constante real de separación λ. El problema de contorno asociado que proporciona las funciones propias de este problema es $X'' - \lambda X = 0, X'(0) = 0, X'(L) = 0$, cuyas soluciones no triviales están asociadas al valor propio nulo y a valores propios negativos:

$$\begin{aligned} &\lambda_0 = 0, \qquad X_0(x) = 1 \\ &\lambda_n = -n^2\pi^2/L^2, \qquad X_n(x) = \cos(n\pi x/L), \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

La solución después de resolver la ecuación diferencial en la variable y es:

$$u(x,y) = A_0(y-H) + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sinh\left(\frac{n\pi(y-H)}{L}\right)\right\}$$

siendo A_0 y A_n:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{-1}{LH}\int_0^L f(s)ds \\ A_n &= \frac{-2}{L\sinh(n\pi H/L)}\int_0^L f(s)\cos\left(\frac{n\pi s}{L}\right) ds \end{aligned}$$
