Ejercicios propuestos en la clase del 7/11/2023

1.– Considérese el problema de valores iniciales en el dominio $-\infty < x < +\infty$, $t > 0$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad q(u) = u^2/2; \qquad u(x,0) = +x$$

Solución 1. Las características son $s = t$, $\tau = x - ut$, y la solución en el dominio característico $u = \tau$. En consecuencia, la solución es

$$u(x,t) = \frac{x}{t+1}$$

que corresponde a una **onda de expansión**.

2.– Considérese el problema de valores iniciales en el dominio $-\infty < x < +\infty$, $t > 0$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad q(u) = u^2/2; \qquad u(x,0) = -x$$

Solución 2. Las características son $s = t$, $\tau = x - ut$, y la solución en el dominio característico $u = -\tau$. En consecuencia, la solución es

$$u(x,t) = \frac{-x}{1-t}$$

que corresponde a una **onda de compresión**, $\forall t < 1$. En el instante $t = 1$ y en el punto $x = 0$ se produce una **onda de choque**, que de acuerdo con la condición de Rankine-Hugoniot, en este caso no se propaga.

3.– Considérese el problema de valores iniciales en el dominio $-\infty < x < +\infty$, $t > 0$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad q(u) = u^2/2; \qquad u(x,0) = \alpha + \beta x$$

Solución 3. Las características son $s = t$, $\tau = x - ut$, y la solución en el dominio característico $u = \alpha + \beta\tau$. En consecuencia, la solución es

$$u(x,t) = \frac{\alpha + \beta x}{1 + \beta t}$$

que corresponde a ondas de expansión cuando $\beta > 0$, $\forall t$. Cuando $\beta < 0$ se producen ondas de compresión $\forall t < 1/|\beta|$, y en el instante $t = 1/|\beta|$ correspondiente al punto $x = -\alpha/\beta$ se produce una onda de choque.

4.– Considérese el problema de valores iniciales en el dominio $-\infty < x < +\infty$, $t > 0$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad q(u) = u^2; \qquad u(x,0) = \begin{cases} 4; & x < 0 \\ 3; & x > 0 \end{cases}$$

Solución 4. Gráficamente se observa una superposición de curvas características en el plano característico para $t > 0$ por lo que se produce una onda de choque en $x_s = 0$ en $t_s = 0$. La discontinuidad en $x_s = 0$ se propaga desde el instante $t_s = 0$ a velocidad $v_s = 7$ (condición de Rankine-Hugoniot). La solución es

$$u(x,t) = \begin{cases} 4; & x < 7t \\ 3; & x > 7t \end{cases}$$
