Ejercicios propuestos de la clase del 31/10/2023

1.– Resolver el problema de valores iniciales

$$x\frac{\partial v}{\partial x} + t\frac{\partial v}{\partial t} = cv, \quad c \in \mathbb{R}; \qquad v(x,1) = f(x)$$

Solución 1. Las características son $x = x_0 e^s$, $t = e^s$ y la solución en el dominio característico $v = f(x_0)e^{cs}$. En consecuencia, la solución es

$$v(x,t) = t^c f\left(\frac{x}{t}\right)$$

2.– Resolver el problema de valores iniciales

$$t\frac{\partial v}{\partial x} - x\frac{\partial v}{\partial t} = 0; \qquad v(x,0) = f(x)$$

Solución 2. Las características son $x = x_0\cos(s)$, $t = -x_0\sin(s)$ y la solución en el dominio característico $v = f(x_0)$. En consecuencia, la solución es

$$v(x,t) = f\left(\sqrt{x^2+t^2}\right)$$

3.– Resolver el problema de valores iniciales

$$x\frac{\partial v}{\partial x} + (x+y)\frac{\partial v}{\partial y} = v + 1; \qquad v(x,0) = x^2$$

Solución 3. Las características son $x = x_0 e^s$, $y = x_0\, s\, e^s$ y la solución en el dominio característico $v = -1 + (x_0^2+1)e^s$. En consecuencia, la solución es

$$v(x,y) = x^2 e^{-y/x} + e^{+y/x} - 1$$

4.– Resolver el problema de valores iniciales

$$x\frac{\partial v}{\partial x} + y\frac{\partial v}{\partial y} = v + 1; \qquad v(x,x) = x^2$$

Solución 4. Las características son $x = x_0\, e^s$, $y = x_0\, e^s$ y la solución en el dominio característico $v = -1 + (x_0^2+1)e^s$. No es posible en este caso obtener una expresión única que relacione las variables del dominio característico con el dominio (x,y) por lo que no existe solución.

5.– Resolver el problema de valores iniciales

$$x\frac{\partial v}{\partial x} + y\frac{\partial v}{\partial y} = v + 1; \qquad v(x,x^2) = x^2$$

Solución 5. Las características son $x = x_0\, e^s$, $y = x_0^2\, e^s$ y la solución en el dominio característico $v = -1 + (x_0^2+1)e^s$. En consecuencia, la solución es

$$v(x,y) = -1 + y + x^2/y$$

6.− Resolver el problema de valores iniciales

$$x\frac{\partial v}{\partial x}+y\frac{\partial v}{\partial y}=v+1; \qquad v(x,x^3)=x^2$$

Solución 6. Las características son $x = x_0\,e^s$, $y = x_0^3\,e^s$ y la solución en el dominio característico $v=-1+(x_0^2+1)e^s$. En consecuencia, la solución es

$$v(x,y)=-1+\sqrt{xy}+x\sqrt{x/y}$$

7.− Resolver el problema de valores iniciales

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0; \qquad v(x,0)=x, \quad \frac{\partial v(x,0)}{\partial t}=0$$

Solución 7. La solución a la ecuación de ondas lineal de segundo orden en función de las condiciones iniciales genéricas $f(x)$ y $g(x)$ es

$$v(x,t)=\left(\frac{f(\eta)}{2}+\frac{\widetilde{g}(\eta)}{2c}\right)_{\eta=x+ct}+\left(\frac{f(\xi)}{2}-\frac{\widetilde{g}(\xi)}{2c}\right)_{\xi=x-ct}$$

siendo $\widetilde{g}(x)$ la primitiva de $g(x)$. Sustituyendo por las condiciones dadas $f(x)=x$ y $g(x)=0$, se obtiene la solución: $v(x,t)=x$.

8.− Resolver el problema de valores iniciales

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0; \qquad v(x,0)=0, \quad \frac{\partial v(x,0)}{\partial t}=x$$

Solución 8. La solución a la ecuación de ondas lineal de segundo orden en función de las condiciones iniciales genéricas $f(x)$ y $g(x)$ es

$$v(x,t)=\left(\frac{f(\eta)}{2}+\frac{\widetilde{g}(\eta)}{2c}\right)_{\eta=x+ct}+\left(\frac{f(\xi)}{2}-\frac{\widetilde{g}(\xi)}{2c}\right)_{\xi=x-ct}$$

siendo $\widetilde{g}(x)$ la primitiva de $g(x)$. Sustituyendo por las condiciones dadas $f(x)=0$ y $g(x)=x$, se obtiene la solución: $v(x,t)=xt$.

9.− Resolver el problema de valores iniciales

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0; \qquad v(x,0)=\sin(x), \quad \frac{\partial v(x,0)}{\partial t}=\lambda\cos(x)$$

Solución 9. La solución a la ecuación de ondas lineal de segundo orden en función de las condiciones iniciales genéricas $f(x)$ y $g(x)$ es

$$v(x,t)=\left(\frac{f(\eta)}{2}+\frac{\widetilde{g}(\eta)}{2c}\right)_{\eta=x+ct}+\left(\frac{f(\xi)}{2}-\frac{\widetilde{g}(\xi)}{2c}\right)_{\xi=x-ct}$$

siendo $\widetilde{g}(x)$ la primitiva de $g(x)$. Sustituyendo por las condiciones dadas $f(x)=\sin(x)$ y $g(x)=\lambda\cos(x)$, se obtiene la solución:

$$v(x,t)=\sin x\cos(ct)+\frac{\lambda}{c}\cos(x)\sin(ct)$$

.
