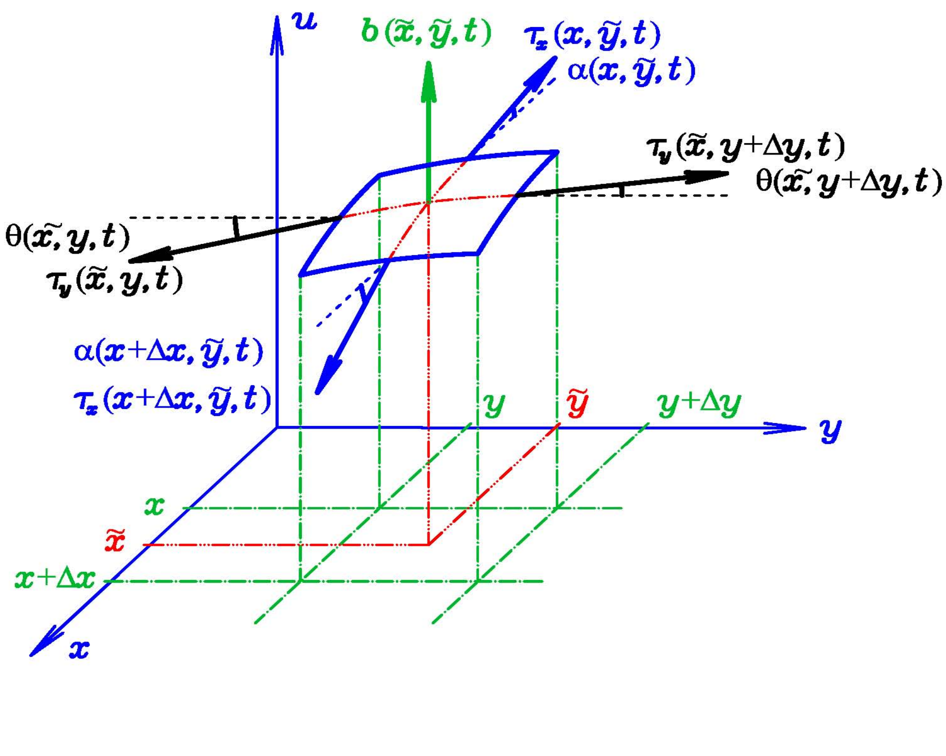
ECUACIÓN DE LA MEMBRANA VIBRANTE

La ecuación de la "membrana vibrante", esto es, la ecuación de ondas en 2D, gobierna un gran número de problemas en la física y la ingeniería. Al igual que en la deducción de la ecuación que rige el movimiento vibratorio de una cuerda elástica flexible tensada cuando se la somete a unas determinadas condiciones iniciales, es preciso, introducir una serie de hipótesis en el modelo.

Así, se pretende obtener la ecuación diferencial que permite obtener los desplazamientos de una membrana vibrando con las condiciones: la membrana es flexible y elástica, es decir, que la membrana no puede resistir momentos flectores y que la tensión en la membrana es tangente en cada punto de la superficie durante la vibración; no se producen elongaciones en los elementos de membrana durante la vibración; el peso de la membrana es muy pequeño en comparación con las tensiones a las que está sometida; la dimensión tranversal de la membrana (espesor) es mucho menor que sus dimensiones longitudinales; la flecha máxima producida durante la vibración es muy pequeña en comparación con las dimensiones longitudinales de la membrana (movimiento en pequeñas vibraciones); la pendiente de la tensión en cada punto de la membrana durante la vibración es muy pequeño; y únicamente se consideran movimientos en la dirección transversal.

Con estas hipótesis, si consideramos una membrana de densidad superficial $\sigma(x,y)$ sobre la que actúan fuerzas externas por unidad de masa $b(x,y,t)$, los desplazamientos $u(x,y,t)$ de cada punto de la membrana x,y en cada instante de tiempo t se pueden estudiar a partir del análisis tensional de una porción de membrana de dimensiones $\triangle x \times \triangle y$, tal como se indica en el esquema adjunto, donde $\tau_x(x,y,t)$ y $\tau_y(x,y,t)$ son las tensiones por unidad de longitud en las direcciones x e y respectivamente en un instante de tiempo t. Así, en un punto $\tilde{x},\tilde{y}$ de la membrana, el balance de fuerzas resulta:

$$
\begin{aligned}
\sigma(\tilde{x},\tilde{y})\triangle x\triangle y\frac{\partial^2 u(\tilde{x},\tilde{y},t)}{\partial t^2} =& \tau_x(x+\triangle x,\tilde{y},t)\triangle y\sin\alpha(x+\triangle x,\tilde{y},t) - \tau_x(x,\tilde{y},t)\triangle y\sin\alpha(x,\tilde{y},t)\\
&+\tau_y(\tilde{x},y+\triangle y,t)\triangle x\sin\theta(\tilde{x},y+\triangle y,t) - \tau_y(\tilde{x},y,t)\triangle x\sin\theta(\tilde{x},y,t)\\
&+b(\tilde{x},\tilde{y},t)\sigma(\tilde{x},\tilde{y})\triangle x\triangle y; \qquad x<\tilde{x}<x+\triangle x, y<\tilde{y}<y+\triangle y
\end{aligned}
$$



que en el límite cuando $\triangle x \to 0$ e $\triangle y \to 0$, puede escribirse como:

$$\sigma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\tau_x \sin \alpha\right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\tau_y \sin \theta\right) + b\,\sigma; \qquad \forall x, y$$

(En esta identidad se ha omitido la dependencia en (x, y, t) de todas las funciones que intervienen en aras a la claridad).

Si se tiene en cuenta la hipótesis de que el movimiento tiene lugar en pequeñas vibraciones (en consecuencia, $\sin \alpha \approx \tan \alpha = \dfrac{\partial u}{\partial x}$ y $\sin \theta \approx \tan \theta = \dfrac{\partial u}{\partial y}$), y que la membrana es isótropa y homogénea, esto es, las tensiones por unidad de longitud τ_x y τ_y son iguales y a su vez iguales a una constante (la tensión por unidad de longitud inicial de la membrana τ_0) se obtiene la ecuación en derivadas parciales:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\tau_0}{\sigma} \triangle u \, + b; \qquad \forall x, y$$

donde $c = \sqrt{\tau_0/\sigma}$ tiene unidades de velocidad, y es la velocidad de propagación de las ondas en la membrana (es característica del material de que esté fabricada y de la tensión inicial de tensado por unidad de longitud). Finalmente si las aceleraciones debidas a fuerzas externas por unidad de masa son únicamente la gravedad, se obtiene:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \triangle u \, - g; \qquad \forall x, y$$

Finalmente si no se considera el peso de la membrana la ecuación se reduce a la ecuación diferencial homogénea

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \triangle u; \qquad \forall x, y$$