Ejercicios propuestos (y soluciones) de la clase del 16/10/2023

1.– Obtener la solución de equilibrio en un problema de calor regido por la ley de Fourier en el dominio comprendido entre dos cilindros concéntricos de radio interior R_0 y radio exterior R_1, si la temperatura de la superficie del cilindro interior es T_0 (constante) y la temperatura de la superficie del cilindro exterior es T_1 (constante), en ausencia de fuentes de calor internas y asumiendo que todas las propiedades físicas son constantes.

2.– Obtener la solución de equilibrio en un problema de calor regido por la ley de Fourier en el dominio comprendido entre dos cilindros concéntricos de radio interior R_0 y radio exterior R_1, si la temperatura de la superficie del cilindro interior es T_0 (constante) y la superficie del cilindro exterior está aislada, en ausencia de fuentes de calor internas y asumiendo que todas las propiedades físicas son constantes.

3.– Obtener la solución de equilibrio en un problema de calor regido por la ley de Fourier en el dominio comprendido entre dos esferas concéntricas de radio interior R_0 y radio exterior R_1, si la temperatura de la superficie de la esfera interior es T_0 (constante) y la temperatura de la superficie de la esfera exterior es T_1 (constante), en ausencia de fuentes de calor internas y asumiendo que todas las propiedades físicas son constantes.

Solución 1. *El problema a resolver es $\Delta u_E = 0$ en coordenadas cilíndricas y, por la simetría de este caso, la solución es independiente de la cordenada angular θ y la cota z, por lo que el problema a resolver se reduce a*

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du_E}{dr}\right) = 0; \quad u_E(R_0) = T_0, \quad u_E(R_1) = T_1$$

La solución es $u_E(r) = \dfrac{T_0 \ln(R_1/r) - T_1 \ln(R_0/r)}{\ln(R_1/R_0)}$.

Solución 2. *El problema a resolver es $\Delta u_E = 0$ en coordenadas cilíndricas y, por la simetría de este caso, la solución es independiente de la cordenada angular θ y la cota z, por lo que el problema a resolver se reduce a*

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du_E}{dr}\right) = 0; \quad u_E(R_0) = T_0, \quad \frac{du_E(R_1)}{dr} = 0$$

La solución es $u_E(r) = T_0$.

Solución 3. *El problema a resolver es $\Delta u_E = 0$ en coordenadas esféricas y, por la simetría de este caso, la solución es independiente de las cordenadas angulares ϕ y ψ, por lo que el problema a resolver se reduce a*

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du_E}{dr}\right) = 0; \quad u_E(R_0) = T_0, \quad u_E(R_1) = T_1$$

La solución es $u_E(r) = \dfrac{T_1\, R_1(1 - R_0/r) - T_0\, R_0(1 - R_1/r)}{(R_1 - R_0)}$.
