a) Calcular analíticamente la integral $\int_1^2 \ln(x)\,dx$

$$I = \int_1^2 \ln(x)\,dx = (x\ln x - x)\Big|_1^2 = 2\ln(2) - 1 = \underline{0.3862943611}$$

b) Evaluar numéricamente la integral anterior utilizando las cuadraturas de Newton-Cotes de 3 y 4 puntos de integración.

+ N-C de 3 ptos $\longrightarrow m = 2$; $I = I_2 + E_2$; $h = \frac{2-1}{2} = 1/2$

$x_0 = 1$; $x_1 = 1.5$; $x_2 = 2$ (NEWTON-COTES CERRADA)

$$I_2 = h/3\left(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right) = 0.385834602$$

+ N-C de 4 ptos $\rightarrow m = 3$; $I = I_3 + E_3$; $h = \frac{2-1}{3} = 1/3$

$x_0 = 1$; $x_1 = 4/3$; $x_2 = 5/3$; $x_3 = 2$ (NEWTON-COTES CERRADA)

$$I_3 = \frac{3h}{8}\left(f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right) = 0.386083784$$

c) Calcular el error cometido en cada caso y compararlo con las cotas de error de las cuadraturas.

+ N-C de 3 ptos: $E_2 = I - I_2 = 0.000459759$ ($\simeq 0.12\%$)

Cota de error:

$$\left.\begin{aligned} E_2 &= -\frac{f^{4)}(\mu)h^5}{90} \\ f^{4)}(\mu) &= -6/\mu^4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} E_2 = \frac{6}{\mu^4}\,\frac{(1/2)^5}{90} \\ \mu \in [1,2] \end{aligned}\right\} \Rightarrow |E_2| \leq \frac{6}{1^4}\cdot\frac{(1/2)^5}{90} = 0.002083 \ (\simeq 0.54\%)$$

+ N-C de 4 ptos : $E_3 = I - I_3 = 0.000210577$ ($\simeq 0.05\%$)

Cota de Error:

$$\left.\begin{aligned} E_3 &= -3\,\frac{f^{4)}(\mu)h^5}{80} \\ f^{4)}(\mu) &= -6/\mu^4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} E_3 = \frac{3\cdot 6}{\mu^4}\,\frac{(1/3)^5}{80} \\ \mu \in [1,2] \end{aligned}\right\} \Rightarrow |E_3| \leq \frac{3\cdot 6}{1^4}\,\frac{(1/3)^5}{80} = 0.000925926 \ (\simeq 0.24$$

d) Comparar la eficacia de ambas fórmulas.

Las fórmulas funcionan relativamente bien. Los resultados son comparables.

a) Calcular analíticamente la integral: $\int_0^1 \ln(x)\,dx$

$$I = \int_0^1 \ln(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 \ln(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(x\ln x - x\right)\Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(-1+\varepsilon-\varepsilon\cdot\ln\varepsilon\right) = \underline{-1}$$

b) Evaluar numéricamente la integral anterior utilizando las cuadraturas de Newton-Cotes de 3 y 4 puntos de integración.

+ N-C de 3 puntos: $m=2$; $I = I_2 + E_2$; $h = \frac{1-0}{4} = 1/4$

$x_0 = 1/4$; $x_1 = 1/2$; $x_2 = 3/4$ (NEWTON COTES ABIERTA)

$$I_2 = \frac{4h}{3}\left(2f(x_0) - f(x_1) + 2f(x_2)\right) = -0.8849352229$$

+ N-C de 4 puntos: $m=3$; $I = I_3 + E_3$; $h = \frac{1-0}{5} = 1/5$

$x_0 = 1/5$; $x_1 = 2/5$; $x_2 = 3/5$; $x_3 = 4/5$ (NEWTON COTES ABIERTA)

$$I_3 = \frac{5h}{24}\left(11f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + 11f(x_3)\right) = -0.8993963352$$

c) Calcular el error cometido en cada caso y compararlo con las cotas de error de las cuadraturas.

+ N-C de 3 puntos: $E_2 = I - I_2 = -0.1150647771$ $(\simeq 12\%)$

Cota de error:

$$\left.\begin{array}{l} E_2 = \dfrac{28\, f^{4)}(\mu)\, h^5}{90} \\ f^{4)}(\mu) = -6/\mu^4 \end{array}\right\} \Rightarrow E_2 = -28 \cdot \frac{6}{\mu^4}\, \frac{(1/4)^5}{90} \left.\begin{array}{l} \\ \mu\in[0,1] \end{array}\right\} \Rightarrow |E_2| \text{ no se puede acotar.}$$

+ N-C de 4 puntos: $E_3 = I - I_3 = -0.1006037648$ $(\simeq 10\%)$

Cota de error:

$$\left.\begin{array}{l} E_3 = \dfrac{95\, f^{4)}(\mu)\, h^5}{144} \\ f^{4)}(\mu) = -6/\mu^4 \end{array}\right\} \Rightarrow E_3 = -95 \cdot \frac{6}{144}\, \frac{(1/5)^5}{\mu^4} \left.\begin{array}{l} \\ \mu\in[0,1] \end{array}\right\} \Rightarrow |E_3| \text{ no se puede acotar.}$$

d) Comparar la eficacia de ambas fórmulas.

Las fórmulas funcionan mal. Los resultados son comparables.

Los errores no son acotables.

Obtener mejores aproximaciones a los valores dados con las integrales de los problemas 1 y 2 combinando los resultados obtenidos con las cuadraturas de 3 y 4 puntos en cada caso. Estudiar hasta qué punto son fiables las hipótesis realizadas en la combinación de las cuadraturas, y analizar los resultados obtenidos.

a) $I = \int_1^2 \ln(x)\,dx$

$$I = I_2 + E_2 \ ; \quad E_2 = -f^{4)}(\mu_2)\,\frac{(1/2)^5}{90}$$

$$I = I_3 + E_3 \ ; \quad E_3 = -3 f^{4)}(\mu_3)\,\frac{(1/3)^5}{80}$$

Hipótesis: $f^{4)}(\mu_2) \simeq f^{4)}(\mu_3) \longrightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} I_2 + E_2 = I_3 + E_3 \\ \dfrac{E_2}{E_3} \simeq \dfrac{80 \cdot 3^5}{3 \cdot 90 \cdot 2^5} = 2'25 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_2 + 2'25 E_3 \simeq I_3 + E_3 \ \Rightarrow E_3 \simeq \frac{I_3 - I_2}{1'25} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} E_2 \simeq 0.000448528 \\ E_3 \simeq 0.000199346 \end{array}\right| \text{(buenas predicciones)}$$

$$I \simeq \hat{I} = I_3 + \frac{I_3 - I_2}{1'25} = 0.386287130$$

$$E = I - \hat{I} = 0.000011232 \quad (\simeq 0.003\%)$$

En este caso, el error se reduce en un factor de 20 - 30.

b) $I = \int_0^1 \ln(x)\,dx$

$$I = I_2 + E_2 \ ; \quad E_2 = 28 f^{4)}(\mu_2)\,\frac{(1/4)^5}{90}$$

$$I = I_3 + E_3 \ ; \quad E_3 = 95 \cdot f^{4)}(\mu_3)\,\frac{(1/5)^5}{144}$$

Hipótesis: $f^{4)}(\mu_2) \simeq f^{4)}(\mu_3) \longrightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} I_2 + E_2 = I_3 + E_3 \\ \dfrac{E_2}{E_3} \simeq \dfrac{28 \cdot 3^5 \cdot 144}{95 \cdot 4^5 \cdot 90} = 1.439144737 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_2 + 1.439144737 E_3 = I_3 + E_3 \Rightarrow E_3 \simeq \frac{I_3 - I_2}{0.439144737} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} E_2 \simeq -0.047391321 \\ E_3 \simeq -0.032930198 \end{array}\right\} \text{(muy malas predicciones)}$$

$$I \simeq \hat{I} = I_3 + \frac{I_3 - I_2}{0.439144737} = -0.93232655$$

$$E = I - \hat{I} = -0.067673450 \quad (\simeq 6'77\%)$$

En este caso los errores sólo se reducen un poco.

Se desea evaluar numéricamente la integral del problema 1 con mayor precisión. Para ello se barajan dos alternativas:

- Utilizar una fórmula de Newton-Cotes de 7 puntos.
- Utilizar la fórmula de Simpson compuesta con 7 puntos de integración.

Estimar las cotas de error en cada caso y compararlas. ¿Qué alternativa parece más conveniente? Evaluar la integral mediante ambas fórmulas y comparar (entre sí y con sus respectivas cotas) los errores cometidos.

a) NEWTON-COTES CERRADOS. $n=6$

$I = I_6^N + E_6^N$; $h = \frac{2-1}{6} = 1/6$; $x_0=1, x_1=7/6, x_2=4/3, x_3=3/2, x_4=5/3, x_5=11/6, x_6=2$

$I_6^N = \frac{h}{140}\left(41 f_0 + 216 f_1 + 27 f_2 + 272 f_3 + 27 f_4 + 216 f_5 + 41 f_6\right) = 0.386294205$

$E_6^N = I - I_6^N = 0.000000156 \ (\simeq 0.00004\%)$

$$\left.\begin{array}{l} E_6^N = -\dfrac{9 f^{8)}(\mu) h^9}{1400} \\ f^{8)}(\mu) = -5040/\mu^8 \end{array}\right\} \Rightarrow E_6^N = \frac{9 \cdot 5040}{\mu^8} \frac{(1/6)^9}{1400} \quad \mu \in [1,2] \Bigg| \Rightarrow |E_6^N| \leq \frac{9 \cdot 5040 (1/6)^9}{1^8 \cdot 1400} = 0.000003215 \ (\simeq 0.00083\%)$$

b) SIMPSON COMPUESTA, $p=6$

$I = I_6^S + E_6^S$; $h = \frac{2-1}{6} = 1/6$; $x_0=1, x_1=7/6, x_2=4/3, x_3=3/2, x_4=5/3, x_5=11/6, x_6=2$

$I_6^S = h/3\left(f_0 + 4 f_1 + 2 f_2 + 4 f_3 + 2 f_4 + 4 f_5 + f_6\right) = 0.386287163$

$E_6^S = I - I_6^S = 0.000007198 \ (\simeq 0.00186\%)$

$$\left.\begin{array}{l} E_6^S = -(p/2) \dfrac{f^{4)}(\mu) h^5}{90} \\ f^{4)}(\mu) = -6/\mu^4 \end{array}\right\} \Rightarrow E_6^S = p/2 \ \frac{6}{\mu^4} \frac{(1/6)^5}{90} \quad \mu \in [1,2] \Bigg| \Rightarrow |E_6^S| \leq \frac{3 \cdot 6 \cdot (1/6)^5}{90} = 0.000025720 \ (\simeq 0.0067\%)$$

Los resultados son buenos en ambos casos.

```
c_______________________________________________ProgramaPrincipal_______________
c
c Calculo de una integral mediante la Formula Compuesta de Simpson (Adaptativa)
c

      implicit real*8 (a-h,o-z)
      logical cnvgc
      external fprueba        !nombre de la funcion subintegrando

      a=-4.d+00               !extremo izquierdo de integracion
      b= 4.d+00               !extremo derecho   de integracion

      n_ini=1                 !comenzamos con 1 subintervalo (1+1  puntos)
      nitr_max=10             !numero maximo de iteraciones

      epsl=1.d-20             !error absoluto maximo admisible de la integral
      rltv=1.d-12             !error relativo maximo admisible de la integral

      call IntFCSA(a,b,fprueba,n_ini,nitr_max,epsl,rltv,n,vint,cnvgc)

      write(6,*) ' n     = ',n      !numero de subintervalos utilizados,
      write(6,*) ' vint  = ',vint   !aprox. numerica del valor de la integral
      write(6,*) ' cnvgc = ',cnvgc  !los errores son (T) o no (F) admisibles

      end
```

```
c_______________________________________________fprueba(x)=1/(1+x*x)____________
c     Función subintegrando que utilizamos como ejemplo

      real*8 function fprueba(x)
      implicit real*8 (a-h,o-z)

      fprueba=1.d+00/(1+x*x)

      return
      end
```

```
c_____________________________________________IntFCSA________________________
!            /b
! Cálculo de  | f(x)dx  usando la FORMULA COMPUESTA DE SIMPSON (ADAPTATIVA)
!            /a
!
! Otros datos:
!
!     n_ini     = numero inicial de subintervalos <=> 2*n_ini+1 puntos
!     niter_max = numero maximo de iteraciones
!     epsl      = error absoluto maximo tolerable en el valor de la integral
!     rltv      = error relativo maximo tolerable en el valor de la integral
!
! Resultados:
!
!     n         = numero de subintervalos que se han usado <=> 2*n+1 puntos
!     vint      = aproximacion numerica del valor de la integral
!     cnvgc     = variable lógica que indica si los errores finales
!                 son (.TRUE.) o no son (.FALSE.) admisibles
!
! Notas:
!
!   * En cada iteracion se duplica el numero de subintervalos.
!   * Para estimar el error de la aproximacion numerica en cada iteracion
!     y para calcular el valor final de la integral se realiza una
!     EXTRAPOLACION DE RICHARDSON.
!____________________________________________________________________________

      Subroutine IntFCSA(a,b,f,n_ini,nitr_max,epsl,rltv,n,vint,cnvgc)
      implicit real*8 (a-h,o-z)
      logical cnvgc

c     Formula Compuesta de Simpson con n_ini subintervalos
        nitr=0
        n=n_ini
        h=(b-a)/dfloat(2*n)  !distancia entre puntos
        t1=f(a)+f(b)         !terminos que van multiplicados por 1
        t4=0.d+00            !terminos que van multiplicados por 4
        do i=1,n
          x=a+dfloat(2*i-1)*h
          t4=t4+f(x)
        enddo
        t2=0.d+00            !terminos que van multiplicados por 2
        do i=1,n-1
          x=a+dfloat(2*i)*h
          t2=t2+f(x)
        enddo
        vint1=(t1+4.d+00*t4+2.d+00*t2)*h/3.d+00  !Formula de Simpson Compuesta
        vint=vint1

c     Formula Compuesta de Simpson Adaptativa
      cnvgc=.false.
      do while(.not.cnvgc.and.nitr.lt.nitr_max)
        nitr=nitr+1
        n=n*2                !duplicamos el numero de aubintervalos
        h=h/2.d+00           !reducimos la distancia entre puntos a la mitad
        t2=t2+t4             !terminos que ahora van multiplicados por 2
        t4=0.d+00
        do i=1,n             !terminos que ahora van multiplicados por 4
          x=a+dfloat(2*i-1)*h
          t4=t4+f(x)
        enddo
        vint2=(t1+4.d+00*t4+2.d+00*t2)*h/3.d+00 !Formula de Simpson Compuesta
        e2=(vint2-vint1)/15.d+00
        vint=vint2+e2                           !Extrapolacion de Richardson
        e2mx=abs(vint)*rltv
        if (epsl.gt.e2mx) e2mx=epsl             !Error absoluto admisible
        cnvgc=(abs(e2).le.e2mx)
        vint1=vint2
      enddo

      return
      end
```

Se desea calcular el volumen de movimiento de tierras en desmonte y en terraplén que se ha de efectuar en el tramo comprendido entre los puntos kilométricos 1730 y 1810 de una carretera. Calcular los volúmenes citados mediante las siguientes técnicas:

a) La regla del trapecio compuesta utilizando sólo datos de los puntos kilométricos que son múltiplos de 10.

$$h = \frac{1810-1730}{8} = 10 \begin{cases} D_8^T = h/2\,(2{,}51 + 2\cdot 1{,}12 + \dots + 2\cdot 1{,}83 + 2{,}57) = 76{,}2\ m^3 \\ T_8^T = h/2\,(0{,}05 + 2\cdot 0{,}82 + \dots + 2\cdot 0{,}11 + 0{,}20) = 89{,}85\ m^3 \end{cases}$$

b) La regla del trapecio compuesta utilizando todos los datos disponibles.

$$h = \frac{1810-1730}{16} = 5 \begin{cases} D_{16}^T = h/2\,(2{,}51 + 2\cdot 1{,}22 + \dots + 2\cdot 2{,}61 + 2{,}57) = 75{,}60\ m^3 \\ T_{16}^T = h/2\,(0{,}05 + 2\cdot 0{,}61 + \dots + 2\cdot 0{,}00 + 0{,}20) = 92{,}625\ m^3 \end{cases}$$

c) Una extrapolación de Richardson entre los valores obtenidos previamente.

$$\left.\begin{array}{l} D = D_8^T + E_8^T \\ D = D_{16}^T + E_{16}^T \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} E_8^T = \dfrac{(b-a)^3}{8^2\cdot 12} f''(\xi_1) \\ E_{16}^T = \dfrac{(b-a)^3}{16^2\cdot 12} f''(\xi_2) \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Hipótesis: } f''(\xi_1) = f''(\xi_2) \\ \Rightarrow \dfrac{E_8^T}{E_{16}^T} \simeq \dfrac{16^2}{8^2} = 4 \end{array}$$

$$D = D_8^T + E_8^T = D_{16}^T + E_{16}^T \Rightarrow E_{16}^T \simeq \frac{D_{16}^T - D_8^T}{3} \Rightarrow D^R = D_{16}^T + \frac{D_{16}^T - D_8^T}{3} = 75{,}40\ m^3$$

$$\left.\begin{array}{l} T = T_8^T + \hat{E}_8^T \\ T = T_{16}^T + \hat{E}_{16}^T \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} \hat{E}_8^T = \dfrac{(b-a)^3}{8^2\cdot 12} f''(\hat{\xi}_1) \\ \hat{E}_{16}^T = \dfrac{(b-a)^3}{16^2\cdot 12} f''(\hat{\xi}_2) \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Hipótesis: } f''(\hat{\xi}_1) = f''(\hat{\xi}_2) \\ \dfrac{\hat{E}_8^T}{\hat{E}_{16}^T} \simeq \dfrac{16^2}{8^2} = 4 \end{array}\right.$$

$$T = T_8^T + \hat{E}_8^T = T_{16}^T + \hat{E}_{16}^T \Rightarrow \hat{E}_{16}^T \simeq \frac{T_{16}^T - T_8^T}{3} \Rightarrow T^R = T_{16}^T + \frac{T_{16}^T - T_8^T}{3} = 93{,}55\ m^3$$

d) La regla de Simpson compuesta, con todos los datos disponibles.

$$h = \frac{1810-1730}{16} = 5 \begin{cases} D_{16}^S = h/3\,(2{,}51 + 4\cdot 1{,}32 + 2\cdot 1{,}12 + \dots + 4\cdot 2{,}61 + 2{,}57) = 75{,}40\ m^3 \\ T_{16}^S = h/3\,(0{,}05 + 4\cdot 0{,}61 + 2\cdot 0{,}82 + \dots + 4\cdot 0{,}00 + 0{,}20) = 93{,}55\ m^3 \end{cases}$$

Los resultados obtenidos con la regla de Simpson compuesta y mediante la extrapolación de Simpson son iguales.

En la práctica, la regla del trapecio compuesta, con todos los datos, es suficiente

MNP - 2023/2024 PR 6 - 07

$$\begin{cases} u'''' = 3(u')^2 + \frac{9}{2} u^3 & x \in [0,1] \\ u(1) = 4, \quad u'(1) = 8, \quad u''(1) = 24, \quad u'''(1) = 96 \end{cases}$$

Conversión de la EDO de 4º orden en un sistema

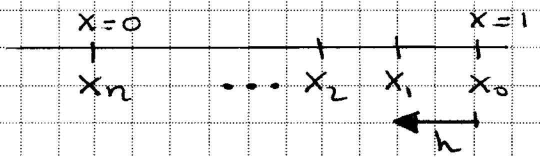
$$\bar{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u \\ u' \\ u'' \\ u''' \end{Bmatrix} \Rightarrow \bar{u}' = \begin{Bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \\ u_4' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u' \\ u'' \\ u''' \\ u'''' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ 3u_2^2 + \frac{9}{2} u_1^3 \end{Bmatrix}$$

luego:

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{u}}{dx} = \bar{\varphi}(x, \bar{u}) \ ; \quad \bar{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \quad \bar{\varphi}(x,\bar{u}) = \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ 3u_2^2 + \frac{9}{2} u_1^3 \end{Bmatrix} \\ \bar{u}(1) = \bar{u}_0 \ ; \quad \bar{u}_0 = \begin{Bmatrix} 4 \\ 8 \\ 24 \\ 96 \end{Bmatrix} \end{cases}$$

a) Métodos de Euler y Euler modificado

Discretización:



$$x_{i+1} = x_i + h \qquad h = \frac{-1}{n}$$

Euler:

$$\bar{u}_0 = \begin{Bmatrix} 4 \\ 8 \\ 24 \\ 96 \end{Bmatrix} \qquad \bar{u}_{i+1} = \bar{u}_i + h\,\bar{\varphi}(x_i, \bar{u}_i) \ ; \quad \bar{u}_i = \begin{Bmatrix} u_1^i \\ u_2^i \\ u_3^i \\ u_4^i \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} u_1^{i+1} = u_1^i + h\, u_2^i \\ u_2^{i+1} = u_2^i + h\, u_3^i \\ u_3^{i+1} = u_3^i + h\, u_4^i \\ u_4^{i+1} = u_4^i + h\left(3(u_2^i)^2 + \frac{9}{2}(u_1^i)^3\right) \end{cases} \quad \text{con} \begin{cases} u_1^0 = 4 \\ u_2^0 = 8 \\ u_3^0 = 24 \\ u_4^0 = 96 \end{cases} \quad h = \frac{-1}{n}$$

Euler-Modificado

$$\bar{u}_0 = \begin{Bmatrix} 4 \\ 8 \\ 24 \\ 96 \end{Bmatrix} \qquad \bar{u}_{i+1} = \bar{u}_i + h \cdot \bar{\varphi}\left(x_i + \frac{h}{2}, \bar{u}_i + \frac{h}{2}\bar{\varphi}(x_i, \bar{u}_i)\right)$$

$$\bar{u}_i + \frac{h}{2}\bar{\varphi}(x_i, \bar{u}_i) = \begin{Bmatrix} u_1^i \\ u_2^i \\ u_3^i \\ u_4^i \end{Bmatrix} + \frac{h}{2}\begin{Bmatrix} u_2^i \\ u_3^i \\ u_4^i \\ 3(u_2^i)^2 + \frac{9}{2}(u_1^i)^3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1^i + h/2\, u_2^i \\ u_2^i + h/2\, u_3^i \\ u_3^i + h/2\, u_4^i \\ u_4^i + h/2\left(3(u_2^i)^2 + \frac{9}{2}(u_1^i)^3\right) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} u_1^{i+1} = u_1^i + h\left(u_2^i + h/2\, u_3^i\right) \\ u_2^{i+1} = u_2^i + h\left(u_3^i + h/2\, u_4^i\right) \\ u_3^{i+1} = u_3^i + h\left(u_4^i + h/2\left((3(u_2^i)^2 + 9/2\,(u_1^i)^3\right)\right) \\ u_4^{i+1} = u_4^i + h\left(3(u_2^i + h/2\, u_3^i)^2 + 9/2\,(u_1^i + h/2\, u_2^i)^3\right) \end{cases} \quad \text{con} \begin{cases} u_1^0 = 4 \\ u_2^0 = 8 \\ u_3^0 = 24 \\ u_4^0 = 96 \end{cases} \quad h = \frac{-1}{n}$$

b) Para avanzar desde $x=1$ ~~hasta~~ $x=0.8$ en 2 pasos utilizaremos un paso $h=\frac{0.8-1}{2}=-0.1$

EULER

i	0	1	2	
x_i	1.000000	0.900000	0.800000	
u_1^i	4.000000	3.200000	2.640000	→ 4.96 %
u_2^i	8.000000	5.600000	4.160000	→ 10.14 %
u_3^i	24.000000	14.400000	9.600000	→ 17.05 %
u_4^i	96.000000	48.000000	23.846400	→ 38.20 %

EULER MODIFICADO

i	0	1	2	
x_i	1.000000	0.900000	0.800000	
u_1^i	4.000000	3.320000	2.790600	→ −0.46 %
u_2^i	8.000000	6.080000	4.889480	→ −5.61 %
u_3^i	24.000000	16.800000	12.064589	→ −4.24 %
u_4^i	96.000000	61.132800	40.550081	→ −5.11 %

c) SOLUCIÓN ANALÍTICA $\quad u(x)=(1-x/2)^{-2} \Rightarrow \begin{cases} u'=(1-x/2)^{-3} \\ u''=3/2\,(1-x/2)^{-4} \\ u'''=3\,(1-x/2)^{-5} \end{cases}$

i	0	1	2
x_i	1.000000	0.900000	0.800000
u_1^i	4.000000	3.305785	2.777784
u_2^i	8.000000	6.010518	4.629630
u_3^i	24.000000	16.392323	11.574074
u_4^i	96.000000	59.608447	38.580247

Observamos que el método de Euler modificado funciona mucho mejor que el método de Euler

$$\begin{cases} u''' = -3uu'' & x \in (-1,1) \\ u(-1) = 1, \quad u'(-1) = -1, \quad u''(-1) = 2 \end{cases}$$

a) Definimos $\bar{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$ con $\begin{cases} u_1 = u \\ u_2 = u' \\ u_3 = u'' \end{cases}$

Luego $\bar{u}' = \begin{Bmatrix} u' \\ u'' \\ u''' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ -3u_1 u_3 \end{Bmatrix}$

lo que equivale al sistema de 1ª orden,

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{u}}{dx} = \bar{\varphi}(x, \bar{u}) \quad \text{con} \quad \bar{\varphi}(x,\bar{u}) = \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ -3u_1 u_3 \end{Bmatrix} \\ \bar{u}(-1) = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{Bmatrix} \end{cases}$$

Euler: $\bar{u}_{i+1} = \bar{u}_i + h\,\bar{\varphi}(x_i, \bar{u}_i)$

$\Rightarrow x_0 = -1, \quad x_i = -1 + i\cdot h, \quad \begin{Bmatrix} u_{1,0} \\ u_{2,0} \\ u_{3,0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{Bmatrix}$

$$\begin{Bmatrix} u_{1,i+1} \\ u_{2,i+1} \\ u_{3,i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{1,i} \\ u_{2,i} \\ u_{3,i} \end{Bmatrix} + h \begin{Bmatrix} u_{2,i} \\ u_{3,i} \\ -3u_{1,i}u_{3,i} \end{Bmatrix}$$

Euler-Modificado: $\bar{u}_{i+1} = \bar{u}_i + h\,\varphi\Big(x_i + \tfrac{1}{2}h, \bar{u}_i + \tfrac{1}{2}h\,\overbrace{\bar{\varphi}(x_i, \bar{u}_i)}^{\bar{k}_{0,i}}\Big)$

$\Rightarrow x_0 = -1, \quad x_i = -1 + i\cdot h, \quad \begin{Bmatrix} u_{1,0} \\ u_{2,0} \\ u_{3,0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{Bmatrix}$

$$\bar{k}_{0,i} = \begin{Bmatrix} u_{2,i} \\ u_{3,i} \\ -3u_{1,i}u_{3,i} \end{Bmatrix}, \quad \bar{u}_i + \tfrac{1}{2}h\bar{k}_{0i} = \begin{Bmatrix} u_{1,i} + \tfrac{1}{2}h\,u_{2,i} \\ u_{2,i} + \tfrac{1}{2}h\,u_{3,i} \\ u_{3,i} - \tfrac{3}{2}h\,u_{1,i}u_{3,i} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u_{1,i+1} \\ u_{2,i+1} \\ u_{3,i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{1,i} \\ u_{2,i} \\ u_{3,i} \end{Bmatrix} + h \begin{Bmatrix} u_{2,i} + \tfrac{1}{2}h u_{3,i} \\ u_{3,i} - \tfrac{3}{2}h\,u_{1,i}u_{3,i} \\ -3\left(u_{1,i} + \tfrac{1}{2}h u_{2,i}\right)\left(u_{3,i} - \tfrac{3}{2}h\,u_{1,i}u_{3,i}\right) \end{Bmatrix}$$

b) $h = 0,5 \rightsquigarrow x_1 = -0,5 \; , \; x_2 = 0$

Euler:

$$\begin{cases} \begin{Bmatrix} u_{1,0} \\ u_{2,0} \\ u_{3,0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ u_{3,1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{Bmatrix} + 0,5 \begin{Bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \cdot 1 \cdot 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,5 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} u_{1,2} \\ u_{2,2} \\ u_{3,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,5 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} + 0,5 \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \cdot 0,5 \cdot (-1) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,5 \\ -0,5 \\ -0,25 \end{Bmatrix} \end{cases}$$

Luego $\left.\begin{array}{l} \boxed{u(0) \simeq 0,5} \\ u(0) = 0,5 \end{array}\right\} \Rightarrow r = 0\%$ (de el valor exacto)

Euler_Modificado

$$\begin{cases} \begin{Bmatrix} u_{1,0} \\ u_{2,0} \\ u_{3,0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ u_{3,1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{Bmatrix} + 0,5 \begin{Bmatrix} -1 + 1/_2\, 0,5 \cdot 2 \\ 2 - 3/_2\, 0,5 \cdot 1 \cdot 2 \\ -3(1 + 1/_2\, 0,5\,(-1))\,(2 - 3/_2\, 0,5 \cdot 1 \cdot 2) \end{Bmatrix} \\ \qquad = \begin{Bmatrix} 0,75 \\ -0,75 \\ 1,4375 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} u_{1,2} \\ u_{2,2} \\ u_{3,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,75 \\ -0,75 \\ 1,4375 \end{Bmatrix} + 0,5 \begin{Bmatrix} -0,75 + 1/_2 \cdot 0,5 \cdot 1,4375 \\ 1,4375 - 3/_2\, 0,5 \cdot 0,75 \cdot 1,4375 \\ -3\,(0,75 + 1/_2\, 0,5 \cdot (-0,75)) \cdot \\ \cdot (1,4375 - 3/_2\, 0,5 \cdot 0,75 \cdot 1,4375) \end{Bmatrix} \\ \qquad = \begin{Bmatrix} 0,5546875 \\ -0,43554688 \\ 0,90686035 \end{Bmatrix} \end{cases}$$

Luego $\left.\begin{array}{l} \boxed{u(0) \simeq 0,5546875} \\ u(0) = 0,5 \end{array}\right\} \Rightarrow r = -10,94\ \%$

c) El método de Euler-Modificado es de 2º orden mientras que el método de Euler es de 1ª orden. El resultado exacto de Euler en este caso es accidental, y se debe a que el valor de $h = 0,5$ es demasiado grande. En general, el método de 2º orden será más preciso.