MÉTODOS NUMÉRICOS Y PROGRAMACIÓN **Curso 2023–2024**

Técnicas Básicas de Integración Numérica (PRÁCTICA 6)

1.– Calcular analíticamente la integral $\int_1^2 \ln(x)dx$. Evaluar numéricamente la integral anterior utilizando las cuadraturas de Newton-Cotes de 3 y 4 puntos de integración. Calcular el error cometido en cada caso y compararlo con las cotas de error de las cuadraturas. Comparar la eficacia de ambas fórmulas.

2.– Repetir el problema anterior para la integral $\int_0^1 \ln(x)dx$. Analizar críticamente los problemas planteados en este caso.

3.– Obtener mejores aproximaciones a los valores de las integrales de los problemas 1 y 2 combinando los resultados obtenidos con las cuadraturas de 3 y 4 puntos en cada caso. Estudiar hasta que punto son fiables las hipótesis realizadas en la combinación de las cuadraturas, y analizar los resultados obtenidos.

4.– Se desea evaluar numéricamente la integral del problema 1 con mayor precisión. Para ello se barajan dos alternativas:

a) Utilizar una fórmula de Newton-Cotes de 7 puntos.
b) Utilizar la fórmula de Simpson compuesta con 7 puntos de integración.

Estimar las cotas de error en cada caso y compararlas. Qué alternativa parece más conveniente? Evaluar la integral mediante ambas fórmulas y comparar (entre sí y con sus respectivas cotas) los errores cometidos.

5.– Realizar una subrutina FORTRAN que permita calcular la integral de una función $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$ mediante una cuadratura compuesta adaptativa de Simpson. El número de subintervalos se duplicará en cada iteración hasta que el error de integración sea inferior a un valor predeterminado. El error de integración se estimará mediante la extrapolación de Richardson.

6.– De una carretera que se está proyectando se han obtenido perfiles transversales cada 5 metros. En cada perfil se han medido con un planímetro las áreas de desmonte y terraplén, que se recogen en la tabla adjunta. Se desea calcular el volumen de movimiento de tierras en desmonte y en terraplén que se ha de efectuar en el tramo comprendido entre los puntos kilométricos 1730 y 1810 de la carretera. Calcular los volúmenes citados mediante las siguientes técnicas: **a)** la regla del trapecio compuesta utilizando sólo los datos de los puntos kilométricos que son múltiplos de 10, **b)** la regla del trapecio compuesta utilizando todos los datos disponibles, **c)** una extrapolación de Richardson entre los valores obtenidos previamente, y **d)** la regla de Simpson compuesta utilizando todos los datos disponibles. Comparar y comentar los resultados que se obtienen con los diferentes métodos.

Punto Kilométrico (m)	Area Desmonte (m^2)	Area Terraplén (m^2)
1730	2.51	0.05
1735	1.32	0.61
1740	1.12	0.82
1745	0.85	0.95
1750	0.63	1.21
1755	0.05	1.35
1760	0.00	1.56
1765	0.00	2.58
1770	0.00	2.41
1775	0.25	2.21
1780	0.56	1.90
1785	0.85	1.50
1790	0.94	0.85
1795	1.57	0.34
1800	1.83	0.11
1805	2.61	0.00
1810	2.57	0.20

TABLA I. Areas de Desmonte y Terraplén. Perfiles transversales cada $5m$.

7.– Se desea resolver mediante un método de intervalo simple la EDO de cuarto orden

$$u'''' = 3(u')^2 + \frac{9}{2}u^3, \qquad x \in [0,1],$$

con las condiciones de contorno

$$u(1) = 4, \qquad u'(1) = 8, \qquad u''(1) = 24, \qquad u'''(1) = 96.$$

Se pide:

a) Plantear y desarrollar completamente la aplicación del método de Euler, y del método de Euler modificado, explicitando cómo se reduce el orden de la EDO y cómo se realizan los cálculos en ambos casos.

b) Utilizando estos dos métodos, calcular los valores de u, u', u'' y u''' en $x = 0.8$ avanzando desde $x = 1$ en dos pasos.

c) Analizar los resultados obtenidos, comparándolos entre sí y con los que proporciona la solución analítica $u(x) = (1 - x/2)^{-2}$.

8.– Se desea resolver la EDO de tercer orden

$$u''' = -3uu'', \qquad x \in [-1,1],$$

con las condiciones de contorno

$$u(-1) = 1, \qquad u'(-1) = -1, \qquad u''(-1) = 2,$$

mediante un método de intervalo simple. Se pide:

a) Plantear y desarrollar completamente la aplicación del método de Euler, y del método de Euler modificado, explicitando cómo se reduce el orden de la EDO y cómo se realizan los cálculos en ambos casos.

b) Utilizando estos dos métodos, calcular los valores de u, u' y u'' en $x = 0$ avanzando desde $x = -1$ en dos pasos.

c) Comparar los resultados obtenidos entre sí, y con los que proporciona la solución analítica

$$u(x) = (2 + x)^{-1}.$$
