

**MÉTODOS NUMÉRICOS Y PROGRAMACIÓN****2023/2024****Ecuaciones no lineales****(PRÁCTICA 5)**

- 1.— Se sabe que el polinomio  $P(x) = x^5 + 5x - 1$  tiene una raíz real  $\alpha$ , tal que  $0,1 < \alpha < 0,2$ . Calcular para qué valores de la constante  $C$  es convergente el algoritmo iterativo:

$$x_{k+1} = x_k - \mathcal{C}P(x_k)$$

Cómo se escogerá el valor inicial de la sucesión?

**Solución 1.**

El método será convergente a la raíz  $\alpha$  si y solo si:  $|\Phi'(\alpha)| < 1$ , siendo  $\Phi = x_k - \mathcal{C}P(x_k)$ .

$$\Phi'(x) = 1 - \mathcal{C}P'(x) = 1 - \mathcal{C}(5x^4 + 5) \Rightarrow |\Phi'(\alpha)| = |1 - \mathcal{C}(5\alpha^4 + 5)|$$

$$|\Phi'(\alpha)| < 1 \Leftrightarrow |1 - \mathcal{C}(5\alpha^4 + 5)| < 1 \Leftrightarrow \begin{aligned} -1 &< 1 - \mathcal{C}(5\alpha^4 + 5) < 1 \\ -2 &< -\mathcal{C}(5\alpha^4 + 5) < 0 \\ 2 &> \mathcal{C}(5\alpha^4 + 5) > 0 \\ 0,4 &> \mathcal{C}(\alpha^4 + 1) > 0 \end{aligned}$$

Luego ha de cumplirse  $0 < \mathcal{C}(\alpha^4 + 1) < 0,4$ . Como sabemos que  $\alpha \in (0,1,0,2)$ , se asegura la convergencia si:

$$\begin{cases} \mathcal{C} > 0 \\ \mathcal{C} < \frac{0,4}{0,2^4 + 1} \end{cases}$$

Por tanto, la convergencia está asegurada ( para un valor inicial suficientemente ajustado a la solución) cuando utilizamos un valor de  $\mathcal{C}$  tal que:

$$\boxed{0 < \mathcal{C} < 0,399361022364}$$

El mejor valor de  $\mathcal{C}$  sería aquel que produjese un F.A.C.  $|\Phi'(\alpha)| = 0$ , luego el valor óptimo será:

$$\mathcal{C}_{opt} = \frac{1}{5(\alpha^4 + 1)} = \frac{0,2}{\alpha^4 + 1}$$

Obviamente este valor depende de la solución  $\alpha$ , que no conocemos. Pero sabemos que  $\alpha \in (0,1,0,2)$ . Para los valores posibles de  $\alpha$  se verifica que  $\alpha^4 \ll 1$ , por tanto se puede estimar con bastante precisión el valor de  $\mathcal{C}_{opt}$ :

$$\alpha \approx 0,15 \Rightarrow \mathcal{C}_{opt} = \frac{0,2}{0,15^4 + 1} = 0,199898801232$$

Podríamos utilizar  $\mathcal{C} = 0,2$  por ejemplo y los resultados tendrían que ser buenos (convergencia casi cuadrática).

Para elegir el valor de  $x_0$ , observamos que:

$$\begin{cases} P(0,1) = -0,49999 \\ P(0,2) = 0,00032 \end{cases}$$

Por tanto, el propio valor 0,2 podría ser una buena aproximación inicial, o podríamos calcular el valor mediante el método de Regula-Falsi como:

$$x_0 = \frac{0,2P(0,1) - 0,1P(0,2)}{P(0,1) - P(0,2)}$$

Si iteramos:

Tabla 1: Ej. 1: Iteraciones con  $\mathcal{C} = 0,2$

$k$	$x_k$	$P(x_k)$	$r_k = (\alpha - x_k)/\alpha$
0	0.2000000000000000	3.200000000001E-04	-3.195912498328E-04
1	0.1999360000000000	-5.116724248744E-07	5.110193671554E-07
2	0.199936102334485	8.176292976003E-10	-8.165836895557E-10
3	0.199936102170959	-1.306510455379E-12	1.306843522286E-12
4	0.199936102171220	0.000000000000E+00	0.000000000000E+00
5	0.199936102171220	0.000000000000E+00	0.000000000000E+00

Tabla 2: Ej. 1: Iteraciones con  $\mathcal{C} = 0,2/(1 + 0,15^4) = 0,199898801231876$

$k$	$x_k$	$P(x_k)$	$r_k = (\alpha - x_k)/\alpha$
0	0.2000000000000000	3.200000000001E-04	-3.195912498328E-04
1	0.199936032383606	-3.494956584138E-07	3.490495905645E-07
2	0.199936102247369	3.813531712638E-10	-3.808644510883E-10
3	0.199936102171137	-4.161115896295E-13	4.175548795615E-13
4	0.199936102171220	0.000000000000E+00	0.000000000000E+00
5	0.199936102171220	0.000000000000E+00	0.000000000000E+00

Tabla 3: Ej. 1: Iteraciones con  $\mathcal{C}_{opt} = 0,2/(1 + \alpha^4) = 0,199680918628237$

$k$	$x_k$	$P(x_k)$	$r_k = (\alpha - x_k)/\alpha$
0	0.2000000000000000	3.200000000001E-04	-3.195912498328E-04
1	0.199936102106039	-3.264259973435E-10	3.260113290438E-10
2	0.199936102171220	0.000000000000E+00	0.000000000000E+00

Se puede observar que tanto para  $\mathcal{C} = 0,2$  como para  $\mathcal{C} = 0,2/(1 + 0,15^4)$  la convergencia es rapidísima (casi-cuadrática), pero para  $\mathcal{C}_{opt}$  es realmente cuadrática.

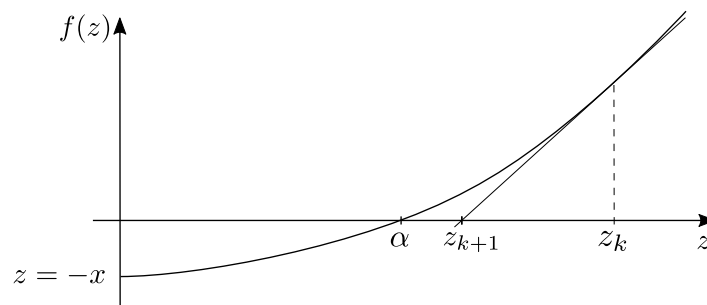
2.— Escribir un algoritmo que permita calcular  $x^{1/n}$ ,  $n$  entero no nulo, sin evaluar ninguna raíz.

**Solución 2.**

Pretendemos calcular  $z = x^{1/n}$ , es decir  $z^n = x \Leftrightarrow f(z) = z^n - x = 0$ .

Resolvemos  $f(z) = 0$  mediante el método de Newton.

$$z_{k+1} = \Phi(z_k) \quad \Phi(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)} = z - \frac{z^n - x}{nz^{n-1}} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)z + \frac{x}{nz^{n-1}}$$



Se puede observar que:

- el método convergerá de forma monótona decreciente cuando se elige un valor inicial  $z_0 > \alpha$ .
- si  $z_0 < \alpha$ , entonces  $z_1 > \alpha$  y nos encontramos en el anterior caso.

Luego intentamos elegir un valor inicial  $z_0 > \alpha$  y lo más próximo posible a  $\alpha$ .

Podemos elegir por ejemplo:

$$\begin{cases} z_0 = x & \text{si } x > 1 \\ z_0 = 1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Tabla 4: Ej. 2: Ejemplo con  $n = 5$  ;  $x = 0,5$

$k$	$x_k$	$f(x_k)$	$r_k = (\alpha - x_k)/\alpha$
0	1.0000000000000000	5.000000000000E-01	-1.486983549970E-01
1	0.9000000000000000	9.049000000000E-02	-3.382851949733E-02
2	0.872415790275873	5.379460453482E-03	-2.142583163333E-03
3	0.870558521981443	2.285573972949E-05	-9.142128733153E-06
4	0.870550563441640	4.178850598890E-10	-1.671540683645E-10
5	0.870550563296124	0.000000000000E+00	0.000000000000E+00
6	0.870550563296124	0.000000000000E+00	0.000000000000E+00

Éste es el método que se utiliza en la práctica para calcular la raíz entera de un número por ordenador.

Tabla 5: Ej. 2: Ejemplo con  $n = 5$  ;  $x = 20$ 

$k$	$x_k$	$f(x_k)$	$r_k = (\alpha - x_k)/\alpha$
0	20.0000000000000000	3.199980000000E+06	-9.985605433061E+00
1	16.0000250000000000	1.048564192026E+06	-7.788498078456E+00
2	12.800081034774800	3.435882601211E+05	-6.030831987962E+00
3	10.240213835658400	1.125817469149E+05	-4.624747437436E+00
4	8.192534836021100	3.688553315662E+04	-3.499997760257E+00
5	6.554915815326280	1.208139932478E+04	-2.600485939705E+00
6	5.246099316012680	3.953585303008E+03	-1.881578857418E+00
7	4.202160425952500	1.290277074190E+03	-1.308163820297E+00
8	3.374556651685630	4.176063518333E+02	-8.535773943465E-01
9	2.730490912483530	1.317762007349E+02	-4.998047901552E-01
10	2.256353706721350	3.848384318400E+01	-2.393705769733E-01
11	1.959406182449020	8.881674568003E+00	-7.626316017428E-02
12	1.838895108771000	1.027361841733E+00	-1.006880488722E-02
13	1.820926038947400	1.988283514550E-02	-1.987493331568E-04
14	1.820564346798220	7.897121488298E-06	-7.897120246625E-08
15	1.820564203026100	1.254107928617E-12	-1.265654248073E-14
16	1.820564203026080	0.000000000000E+00	0.000000000000E+00
17	1.820564203026080	0.000000000000E+00	0.000000000000E+00

3.— Dada la ecuación  $f(x) = 1 - x^2$ , se pide:

a) Qué condiciones debe cumplir la constante  $m$  para que el método de Whittaker:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{m}$$

sea convergente hacia la raíz  $x = 1$ ?

- b) Garantiza la condición anterior que el método converge a la raíz  $x = 1$  para cualquier valor inicial de  $x_0$ ? Por qué? Dar un ejemplo numérico de convergencia y uno de no convergencia, si se da el caso. (El ejemplo de convergencia no debe ser trivial, en el sentido de que el valor inicial no debe escogerse de forma que el método converja en un número finito de pasos).
- c) Aplicar la aceleración de Aitken al ejemplo convergente desarrollado en el apartado anterior.
- d) Si se incumplen las condiciones determinadas en el apartado a), pero se aplica el método de Steffenson, el algoritmo resultante es convergente? Con qué condiciones? Dar un ejemplo numérico de convergencia.

### Solución 3.a)

Dado el método propuesto de iteración funcional  $x_{k+1} = \Phi(x_k)$  con  $\Phi(x_k) = x_k - \frac{f(x)}{m}$ , para que el método sea convergente a la solución  $\alpha = 1$ , es necesario que cumpla:

$$\begin{aligned} |\Phi'(\alpha)| < 1 &\Leftrightarrow \left| 1 + \frac{2\alpha}{m} \right| < 1 \Leftrightarrow -1 < 1 + \frac{2\alpha}{m} < 1 \\ &\Leftrightarrow -2 < \frac{2\alpha}{m} < 0 \\ &\Leftrightarrow -1 < \frac{\alpha}{m} < 0 \end{aligned}$$

$\alpha = 1$ , luego las condiciones necesarias son:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\alpha}{m} < 0 \rightarrow m < 0 \\ -1 < \frac{\alpha}{m} \rightarrow m < -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{m < -1}$$

Además,  $x_0$  debe estar situado suficientemente cerca de  $\alpha = 1$  para que el método converja.

**Solución 3.b)**

No, la condición anterior solo garantiza la convergencia cuando estamos cerca de la solución, es decir, para un valor de la aproximación inicial suficientemente bueno.

Podemos poner un ejemplo con  $m = -2$  partiendo de dos valores iniciales  $x_0$  distintos:

Tabla 6: Ej. 3b: Ejemplo con  $m = -2$  ;  $x_0 = 0,0$

$k$	$x_k$	$f(x_k)$	$r_k = (\alpha - x_k)/\alpha$
0	0.0000000000000000	1.000000000000E+00	1.000000000000E+00
1	0.5000000000000000	7.500000000000E-01	5.000000000000E-01
2	0.8750000000000000	2.343750000000E-01	1.250000000000E-01
3	0.9921875000000000	1.556396484375E-02	7.812500000000E-03
4	0.999969482421875	6.103422492743E-05	3.051757812500E-05
5	0.999999999534338	9.313225746155E-10	4.656612873077E-10
6	1.0000000000000000	0.000000000000E+00	0.000000000000E+00
7	1.0000000000000000	0.000000000000E+00	0.000000000000E+00

Tabla 7: Ej. 3b: Ejemplo con  $m = -2$  ;  $x_0 = 3,5$

$k$	$x_k$	$f(x_k)$	$r_k = (\alpha - x_k)/\alpha$
0	3.500000000000E+00	-1.125000000000E+01	-2.500000000000E+00
1	-2.125000000000E+00	-3.515625000000E+00	3.125000000000E+00
2	-3.882812500000E+00	-1.407623291016E+01	4.882812500000E+00
3	-1.092092895508E+01	-1.182666892419E+02	1.192092895508E+01
4	-7.005427357601E+01	-4.906601246262E+03	7.105427357601E+01
5	-2.523354896707E+03	-6.367318934736E+06	2.524354896707E+06
6	-3.186182822265E+06	-1.015176097690E+13	3.186183822265E+06
7	-5.075883674630E+12	-2.576459507838E+25	5.075883674631E+12

Se puede observar como las soluciones son distintas en función de la solución inicial que se elija, en el caso  $x_0 = 0,0$  la solución converge cuadráticamente, en cambio con  $x_0 = 3,5$  la solución diverge.

Calculamos ahora otro ejemplo con  $m = -4$  partiendo de dos valores iniciales  $x_0$  distintos:

Se puede observar que para  $m = -4$  el método converge linealmente con un F.A.C. =  $|1 + \frac{2}{-4}| = 0,5$  para ambas aproximaciones iniciales.

**Solución 3.c)** Aitken:

$$\begin{cases} \Delta x_k = x_{k+1} - x_k \\ \Delta^2 x_k = \Delta x_{k+1} - \Delta x_k = x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k \end{cases}$$

$$\hat{x}_k = x_k - \frac{(\Delta x_k)^2}{\Delta^2 x_k} = x_k - \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k}$$

Tabla 8: Ej. 3b: Ejemplo con  $m = -4$  ;  $x_0 = 0,0$ 

$k$	$x_k$	$f(x_k)$	$r_k = (\alpha - x_k)/\alpha$
0	0.0000000000000000	1.000000000000E+00	1.000000000000E+00
1	0.2500000000000000	9.375000000000E-01	7.500000000000E-01
2	0.4843750000000000	7.653808593750E-01	5.156250000000E-01
3	0.675720214843750	5.434021912515E-01	3.242797851563E-01
4	0.811570762656629	3.413528972009E-01	1.884292373434E-01
5	0.896908986956863	1.955542691160E-01	1.030910130431E-01
6	0.945797554235867	1.054669864015E-01	5.420244576413E-02
7	0.972164300836230	5.489657217960E-02	2.783569916377E-02
8	0.985888443881131	2.802397622164E-02	1.411155611887E-02
9	0.992894437936541	1.416063511468E-02	7.105562063459E-03
10	0.996434596715211	7.118094468994E-03	3.565403284789E-03
15	0.999888195448983	2.235966017771E-04	1.118045510173E-04
20	0.999996505729328	6.988529133056E-06	3.494270671478E-06
25	0.99999890803672	2.183926445243E-07	1.091963282018E-07
30	0.99999996587614	6.824771192626E-09	3.412385596313E-09
35	0.99999999893363	2.132740650751E-10	1.066370325375E-10
40	0.9999999996668	6.664890861430E-12	3.332445430715E-12
45	0.9999999999896	2.082778394197E-13	1.041389197098E-13
50	0.9999999999997	6.439293542826E-15	0.000000000000E+00
52	0.9999999999998	0.000000000000E+00	0.000000000000E+00
53	0.9999999999998	0.000000000000E+00	0.000000000000E+00

Tabla 9: Ej. 3b: Ejemplo con  $m = -4$  ;  $x_0 = 3,5$ 

$k$	$x_k$	$f(x_k)$	$r_k = (\alpha - x_k)/\alpha$
0	3.500000000000E+00	-1.125000000000E+01	-2.500000000000E+00
1	6.875000000000E-01	5.273437500000E-01	3.125000000000E-01
2	8.193359375000E-01	3.286886215210E-01	1.806640625000E-01
3	9.015080928802E-01	1.872831584714E-01	9.849190711975E-02
4	9.483288824981E-01	1.006723306199E-01	5.167111750190E-02
5	9.734969651531E-01	5.230365883775E-02	2.650303484692E-02
6	9.865728798625E-01	2.667395271978E-02	1.342712013749E-02
7	9.932413680425E-01	1.347158480914E-02	6.758631957539E-03
8	9.966092642447E-01	6.769974421546E-03	3.390735755254E-03
9	9.983017578501E-01	3.393600273335E-03	1.698242149867E-03
10	9.991501579185E-01	1.698961931504E-03	8.498420815336E-04
15	9.999734205589E-01	5.315817573170E-05	2.657944109918E-05
20	9.999991693711E-01	1.661257153840E-06	8.306289218663E-07
25	9.999999740428E-01	5.191434859775E-08	2.595717463194E-08
30	9.99999991888E-01	1.622323386741E-09	8.111616933704E-10
35	9.99999999747E-01	5.069766828569E-11	2.534883414285E-11
40	9.99999999992E-01	1.584288256140E-12	7.921441280701E-13
45	1.000000000000E+00	4.951594689828E-14	2.475797344914E-14
50	1.000000000000E+00	0.000000000000E+00	0.000000000000E+00
52	1.000000000000E+00	0.000000000000E+00	0.000000000000E+00
53	1.000000000000E+00	0.000000000000E+00	0.000000000000E+00

Tabla 10: Ej. 3c: Ejemplo con  $m = -2$ , aplicando Aitken

$k$	$x_k$	$\Delta x_k$	$\Delta^2 x_k$	$\hat{x}_k$	$r_k = (\alpha - \hat{x}_k)/\alpha$
0	0.0000000000000000	0.5000000000000000	-0.1250000000000000	2.0000000000000000	-1.000000000000E+00
1	0.5000000000000000	0.3750000000000000	-0.2578125000000000	1.0454545454545455	-4.545454545455E-02
2	0.8750000000000000	0.1171875000000000	-0.109405517578125	1.000523012552300	-5.230125523013E-04
3	0.9921875000000000	0.007781982421875	-0.007751465309411	1.00000119678610	-1.196786103552E-07
4	0.999969482421875	0.000030517112464	-0.000030516646802	1.0000000000000000	-7.105427357601E-15
5	0.99999999534338	0.00000000465661	-0.00000000465661	1.0000000000000000	0.000000000000E+00
6	1.0000000000000000	0.0000000000000000			
7	1.0000000000000000				

Tabla 11: Ej. 3c: Ejemplo con  $m = -4$ , aplicando Aitken

$k$	$x_k$	$\Delta x_k$	$\Delta^2 x_k$	$\hat{x}_k$	$r_k = (\alpha - \hat{x}_k)/\alpha$
0	0.0000000000000000	0.2500000000000000	-0.0156250000000000	4.0000000000000000	-3.000000000000E+00
1	0.2500000000000000	0.2343750000000000	-0.043029785156250	1.526595744680850	-5.265957446809E-01
2	0.4843750000000000	0.191345214843750	-0.055494667030871	1.144131931656760	-1.441319316568E-01
3	0.675720214843750	0.135850547812879	-0.050512323512645	1.041083952990530	-4.108395299053E-02
4	0.811570762656629	0.085338224300234	-0.036449657021231	1.011369968516790	-1.136996851679E-02
5	0.896908986956863	0.04888567279003	-0.022521820678640	1.003032379230400	-3.032379230403E-03
6	0.945797554235867	0.026366746600363	-0.012642603555462	1.000786649103700	-7.866491037041E-04
7	0.972164300836230	0.013724143044901	-0.006718148989491	1.000200610035620	-2.006100356167E-04
8	0.985888443881131	0.007005994055410	-0.003465835276741	1.000050672834670	-5.067283466831E-05
9	0.992894437936541	0.003540158778670	-0.001760635161421	1.000012735044770	-1.273504477139E-05
10	0.996434596715211	0.001779523617249	-0.000887381125025	1.000003192231880	-3.192231884608E-06
15	0.999888195448983	0.000055899150444	-0.000027947231511	1.000000003125500	-3.125501413237E-09
20	0.999996505729328	0.000001747132283	-0.000000873563852	1.000000000003050	-3.052225139299E-12
25	0.999999890803672	0.000000054598161	-0.000000027299078	1.000000000000000	0.000000000000E+00
30	0.999999996587614	0.000000001706193	-0.000000000853096	1.000000000000000	0.000000000000E+00
35	0.999999999893363				
40	0.999999999996668				
45	0.99999999999896				
50	0.999999999999997				
52	0.999999999999998				
53	0.999999999999998				

Las diferencias con el ejemplo anterior no son muy grandes ya que la convergencia ya era cuadrática para  $m = -2$ . En el caso de  $m = -4$  la convergencia era lineal y al aplicar aceleración de Aitken la convergencia ha mejorado notablemente.

**Solución 3.d)**

Si el método es de orden 1 pero con F.A.C.>1 (caso de Whittaker no convergente), sabemos por la teoría que el método de Steffensen:

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) \quad \text{con} \quad \Phi(x) = \frac{x\phi(\phi(x)) - \phi(x)^2}{\phi(\phi(x)) - 2\phi(x) + x}$$

es de orden 2, luego el algoritmo resultante será convergente para un valor inicial suficientemente cercano a la solución, y la convergencia será cuadrática.

$$\phi(x) = x - \frac{1-x^2}{m} \Rightarrow \phi(\phi(x)) = \phi(x) - \frac{1-\phi(x)^2}{m} = \left(x - \frac{1-x^2}{m}\right) - \frac{1 - \left(x - \frac{1-x^2}{m}\right)^2}{m}$$

Tabla 12: Ej. 3d: Ejemplo de caso divergente con  $m = 1$

$k$	$x_k$	$f(x_k)$	$r_k = (\alpha - x_k)/\alpha$
0	1.100000000000E+00	-2.100000000000E-01	-1.000000000000E-01
1	1.310000000000E+00	-7.161000000000E-01	3.100000000000E-01
2	2.026100000000E+00	-3.105081210000E+00	1.026100000000E+00
3	5.131181210000E+01	-2.532902060986E+01	4.131181210000E+00
4	3.046020181986E+01	-9.268238949064E+02	2.946020181986E+01
5	9.572840967263E+03	-9.163918418451E+05	9.562840967263E+02
6	9.173491259418E+06	-8.415294188652E+11	9.173481259418E+05
7	8.415303362143E+12	-7.081733067689E+13	8.415303362133E+11

Tabla 13: Ej. 3d: Ejemplo del método de Steffensen al caso divergente

$k$	$x_k$	$\phi(x_k)$	$\phi(\phi(x_k))$	$f(x_k)$	$r_k = (\alpha - x_k)/\alpha$
0	1.1000000000000000	1.3100000000000000	2.0261000000000000	-2.100000000000E+00	-1.000000000000E-01
1	1.012863070539420	1.038754670201960	1.117765935068340	-2.589159966254E-02	-1.286307053945E-02
2	1.000242980964060	1.000729001931940	1.002187537239630	-4.860209678748E-04	-2.429809640629E-04
3	1.00000088523830	1.000000265571490	1.000000796714530	-1.770476594221E-07	-8.852382582525E-08
4	1.0000000000000000	1.0000000000000000	1.0000000000000000	0.000000000000E+00	0.000000000000E+00



4.— Analizar detalladamente si alguna de las siguientes técnicas iterativas puede ser conveniente para calcular una raíz triple de la ecuación  $f(x) = 0$

- a)  $x_{k+1} = x_k - f'(x_k)/f''(x_k)$
- b)  $x_{k+1} = x_k - f''(x_k)/f'''(x_k)$
- c)  $x_{k+1} = x_k - f'''(x_k)/f^{(4)}(x_k)$

#### Solución 4.

La raíz  $\alpha$  de  $f(x)$  es triple. Por lo tanto:  $f(\alpha) = f'(\alpha) = f''(\alpha) = 0$ .

Además, para que el método  $x_{k+1} = \phi(x_k)$  sea convergente tiene que cumplir:

$$\begin{cases} \alpha = \phi(\alpha) & \text{condición de punto fijo} \\ |\phi'(\alpha)| < 1 & \text{FAC} < 1 \\ x_0 \text{ suficientemente cercano a } \alpha \end{cases}.$$

#### Solución 4.a

El método planteado en este apartado es una aplicación del método de Newton a una función  $g(x)$  siendo  $g(x) = f'(x)$ . Luego no es conveniente puesto que  $\alpha$  es una raíz doble de  $g(x)$ , por tanto, el método será de primer orden y no de segundo, y además el denominador tiende a 0 por lo que puede producirse inestabilidades numéricas.

Por otro lado, el método podría converger a un valor  $\rho$  tal que  $f'(\rho) = 0$  pero  $f(\rho) \neq 0$ , es decir, distinto a la solución buscada.

#### Solución 4.b

De la misma forma que en el apartado anterior, el método es una aplicación del método de Newton, pero ahora a una función  $h(x) = f''(x)$ . En este caso sí es conveniente puesto que convergerá cuadráticamente ya que  $\alpha$  es una raíz simple de  $h(x)$ .

Aún así, el método puede converger a un valor  $\gamma$  tal que  $f''(\gamma) = 0$  pero  $f(\gamma) \neq 0$  y  $f'(\gamma) \neq 0$ , y por lo tanto converger a una solución incorrecta.

#### Solución 4.c

El método se corresponde con la aplicación del método de Newton a una función  $r(x) = f'''(x)$ , luego el método no se corresponde al problema.

Además, no puede converger pues:

$$\phi(\alpha) = \alpha - \frac{f'''(\alpha)}{f^{(4)}(\alpha)} \neq \alpha$$

5.— Para obtener las raíces simples de la ecuación  $f(x)$  se plantea el siguiente método iterativo:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{u(x_i)}{a u(x_i) + b} \quad ; \quad u(x_i) = \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

donde  $a$  y  $b$  son dos constantes reales. Se pide:

- Hallar las constantes  $a$  y  $b$  para las que este método es de tercer orden.
- Plantear el cálculo de la raíz cuadrada del número real positivo  $s$  resolviendo la ecuación  $x^2 - s = 0$  mediante el método de Newton y mediante este método de tercer orden.
- Aplicar ambos algoritmos al caso  $s = 2$ , partiendo de las aproximaciones  $x_0 = 1$   $x_0 = 5$ .
- Cuáles son las conclusiones? Eran previsibles los resultados que se han obtenido?

**Solución 5.a)**

El método planteado se puede expresar como:

$$x_{i+1} = \phi(x_i) \quad \text{con} \quad \phi(x) = x - \frac{f(x)}{af(x) + bf'(x)}$$

Luego, el método será de tercer orden al menos si y solo si:  $\alpha = \phi(\alpha)$ ,  $\phi'(\alpha) = 0$  y  $\phi''(\alpha) = 0$ , para el valor  $\alpha$  tal que  $f(\alpha) = 0$  y  $f'(\alpha) \neq 0$ .

$$\alpha = \phi(\alpha) \Leftrightarrow \alpha = \alpha - \frac{\cancel{f(\alpha)}}{a \cancel{f(\alpha)} + b f'(\alpha)} = \alpha, \quad \forall b \neq 0$$

$$\phi'(x) = 1 - \left( \frac{f'(x)(af(x) + bf'(x)) - f(x)(af'(x) + bf''(x))}{(af(x) + bf'(x))^2} \right) = 1 - \frac{b(f'(x))^2 - bf(x)f''(x)}{(af(x) + bf'(x))^2}$$

$$\phi''(x) = -b \left[ \frac{(2f'(x)f''(x) - f'(x)f'''(x) - f(x)f''''(x))(af(x) + bf'(x))^2}{(af(x) + bf'(x))^4} - \frac{((f'(x))^2 - f(x)f''(x))2(af(x) + bf'(x))(af'(x) + bf''(x))}{(af(x) + bf'(x))^4} \right]$$

Por tanto:

$$\phi'(\alpha) = 1 - b \frac{(f'(\alpha))^2}{b^2 f'(\alpha)^2} = 1 - \frac{1}{b} = 0 \Leftrightarrow \boxed{b = 1}$$

$$\phi''(\alpha) = -b \left[ \frac{(f'(\alpha)f''(\alpha))b^2(f'(\alpha))^2}{b^4(f'(\alpha))^4} - \frac{(f'(\alpha))^2 2bf'(\alpha)(af(\alpha) + bf'(\alpha))^2}{b^4(f'(\alpha))^4} \right] = -\frac{f''(\alpha)}{bf'(\alpha)} + \frac{2af'(\alpha) + bf''(\alpha)}{b^2 f'(\alpha)} = \frac{2a}{b^2} + \frac{f''(\alpha)}{bf'(\alpha)} = 0 \Leftrightarrow \boxed{a = -\frac{bf''(\alpha)}{2f'(\alpha)}}$$

Luego el método de tercer orden será:

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x) - \frac{1}{2} \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} f(x)}$$

Para otros valores de  $a$  el método será de 2º orden. ( $a = 0 \Rightarrow$  Newton)

**Solución 5.b)**

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 5 & \rightarrow \alpha = \sqrt{s} \\ f'(x) = 2x \\ f''(x) = 2 \end{cases}$$

Newton:  $x_{i+1} = \phi_N(x_i)$  ;  $\phi_N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^2 - s}{2x} = \frac{x}{2} + \frac{s}{2x}$

3º Orden:  $x_{i+1} = \phi_3(x_i)$  ;  $\phi_3(x) = x - \frac{f(x)}{af(x)bf'(x)} = x - \frac{x^2 - s}{a(x^2 - s) + b(2x)}$

Con  $\begin{cases} b = 1 \\ a = \frac{-bf''(\alpha)}{2f'(\alpha)} = \frac{-2}{2(2\alpha)} = -\frac{1}{2\alpha} \end{cases}$

Necesitamos el propio valor de la solución  $\alpha$  para ajustar correctamente el valor del coeficiente  $a$ , por lo que el método no es práctico. En este caso particular, sabemos que  $\alpha = \sqrt{s}$  por lo que sí se podría utilizar.

En la práctica, se podría modificar el algoritmo estimando y actualizando el valor del parámetro  $a$  en cada iteración de la forma:

$$a = -\frac{bf''(\alpha)}{2f'(\alpha)} \approx -\frac{bf''(x_k)}{2f'(x_k)}$$

De modo que:

$$x_{i+1} = \phi(x_i), \quad \phi(x) = x - \frac{f(x)}{\frac{-f''(x)}{2f'(x)}f(x) + f'(x)} = x - \frac{2f(x)f'(x)}{2(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}$$

Este método es práctico y será probablemente de 3º orden (habría que comprobarlo) pero exige el cálculo de  $f''(x)$

**Solución 5.c)**

Tabla 14: Ej. 5c: Ejemplo de aplicación del método de Newton-Raphson con  $x_0 = 1$

$s = 2$			
$k$	$x_k$	$f(x_k)$	$r_k = (\alpha - x_k)/\alpha$
0	1,0000000000000000	-1,0000000000000000E + 00	2,928932188135E - 01
1	1,5000000000000000	2,5000000000000000E - 01	-6,066017177982E - 02
2	1,4166666666666670	6,94444444444445E - 03	-1,734606680942E - 03
3	1,414215686274510	6,007304882871E - 06	-1,501825092953E - 06
4	1,414213562374690	4,510614104447E - 12	-1,127542503809E - 12
5	1,414213562373100	0,0000000000000000E + 00	0,0000000000000000E + 00
6	1,414213562373100	0,0000000000000000E + 00	0,0000000000000000E + 00

**Solución 5.d)** Se observa que para:

Tabla 15: Ej. 5c: Ejemplo de aplicación del método de Newton-Raphson con  $x_0 = 5$ 

$s = 2$			
$k$	$x_k$	$f(x_k)$	$r_k = (\alpha - x_k)/\alpha$
0	5,0000000000000000	2,300000000000E + 01	-2,535533905933E + 00
1	2,7000000000000000	5,290000000000E + 00	-9,091883092037E - 01
2	1,720370370370370	9,596742112483E - 01	-2,164855550413E - 01
3	1,441455368177650	7,779357844816E - 02	-1,926286561617E - 02
4	1,414470981367770	7,281571315052E - 04	-1,820227167415E - 04
5	1,414213585796880	6,625247950254E - 08	-1,656311976461E - 08
6	1,414213562373100	0,000000000000E + 00	0,000000000000E + 00
7	1,414213562373100	0,000000000000E + 00	0,000000000000E + 00

Tabla 16: Ej. 5c: Ejemplo de aplicación del método de tercer orden con  $x_0 = 1$ 

$s = 2$			
$a =$	-0,353553390593274	$[-(1/2)(f''(\alpha)/(f'(\alpha)))]$	
$b =$	1		
$k$	$x_k$	$f(x_k)$	$r_k = (\alpha - x_k)/\alpha$
0	1,0000000000000000	-1,000000000000E + 00	2,928932188135E - 01
1	1,424889447588830	3,030993785001E - 02	-7,548990831217E - 03
2	1,414213410845510	-4,285847143848E - 07	1,071461843694E - 07
3	1,414213562373100	0,000000000000E + 00	0,000000000000E + 00
4	1,414213562373100	0,000000000000E + 00	0,000000000000E + 00

Tabla 17: Ej. 5c: Ejemplo de aplicación del método de tercer orden con  $x_0 = 5$ 

$s = 2$			
$a =$	-0,353553390593274	$[-(1/2)(f''(\alpha)/(f'(\alpha)))]$	
$b =$	1		
$k$	$x_k$	$f(x_k)$	$r_k = (\alpha - x_k)/\alpha$
0	5,0000000000000000	2,300000000000E + 01	-2,535533905933E + 00
1	-7,310841140187210	5,144839817705E + 01	6,169545346404E + 00
2	-5,742839203198120	3,098020211379E + 01	5,060800543845E + 00
3	-4,362188040799800	1,702868450330E + 01	4,084532744460E + 00
4	-3,207303614914170	8,286796478242E + 00	3,267906135430E + 00
5	-2,320487136236160	3,384660549437E + 00	2,640832189689E + 00
6	-1,740686924813230	1,029990970216E + 00	2,230851528458E + 00
7	-1,472845873963900	1,692749684525E - 01	2,041459305123E + 00
8	-1,416524880948660	6,542738346614E - 03	2,001634349038E + 00
9	-1,414217332173550	1,066262008198E - 05	2,000002665651E + 00
10	-1,414213562383140	2,842259760882E - 11	2,000000000007E + 00
11	-1,414213562373100	0,000000000000E + 00	2,000000000000E + 00
12	-1,414213562373100	0,000000000000E + 00	2,000000000000E + 00

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 = 1 \\ x_0 = 5 \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} \text{Newton-Raphson converge cuadráticamente} \\ \text{El nuevo algoritmo converge con orden 3 pero la ventaja es} \\ \text{inapreciable en la práctica} \\ \text{Newton-Raphson consigue converger aunque } x_0 \text{ no está cerca de } \alpha \\ \text{El nuevo algoritmo no converge a } +\sqrt{2} \text{ y acaba convergiendo a} \\ \text{otra raíz } (-\sqrt{2}) \text{ accidentalmente} \end{array} \right.$$

En líneas generales:

- No se aprecia la diferencia entre un algoritmo de orden 2 y uno de orden 3, en la práctica.
- Es normal que un algoritmo de orden superior tenga un radio de convergencia menor.

En todo caso, el algoritmo que se propone no tiene utilidad en la práctica, pues se requiere conocer el valor de la solución para ajustar sus coeficientes y poder aplicarlo. Podríamos convertirlo en un algoritmo práctico de 3º orden (véase la nota al final del apartado b) )pero en general no compensará el trabajo adicional (cálculo de la derivada segunda) si comparamos los resultados con los que proporciona el método de Newton-Raphson.

---

6.— Sea la ecuación  $f(x) = \tan(\pi x) - 6$ . Considerando  $x_0 = 0$  y  $x_1 = 0,48$ , se desea aproximar la raíz  $x = \frac{1}{\pi} \arctan(6) = 0,447431543$  empleando:

- a) Método de Bisección
- b) Método de *Regula-Falsi*
- c) Método Secante

Analizar los resultados obtenidos en cada uno de los casos tras haber realizado diez iteraciones.

---

### Solución 6.

$$f(x) = \tan(\pi x) - 6$$

$$x_0 = 0; \quad x_1 = 0,48 \quad \longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x_0) = -6 \\ f(x_1) \approx 9,895 \end{array} \right.$$

$$\alpha = \frac{1}{\pi} \arctan(6) = 0,447431543$$

#### Solución 6.a Bisección

Partimos de  $x_0 = 0$ ;  $z_0 = 0,48$  y aplicamos:

$$\mu_k = \frac{x_k + z_k}{2} \quad \text{si} \quad f(x_k)f(\mu_k) \quad \text{es} \quad \left\{ \begin{array}{l} < 0 \longrightarrow x_{k+1} = x_k; \quad z_{k+1} = \mu_k \\ = 0 \longrightarrow \alpha = \mu_k \\ > 0 \longrightarrow x_{k+1} = \mu_k; \quad z_{k+1} = z_k \end{array} \right.$$

Y esperamos una convergencia aproximadamente lineal con F.A.C.  $\approx 1/2$ .

Tabla 18: Ej. 6a: Ejemplo de aplicación del método de Bisección

$k$	$x_k$	$z_k$	$\mu_k$	$f(\mu_k)$	$f(x_k) f(\mu_k)$	$r_k = \frac{\alpha - \mu_k}{\alpha}$
0	0,0000000000000000	0,4800000000000000	0,2400000000000000	-5,061E + 00	3,037E + 01	4,636E - 01
1	0,2400000000000000	0,4800000000000000	0,3600000000000000	-3,875E + 00	1,961E + 01	1,954E - 01
2	0,3600000000000000	0,4800000000000000	0,4200000000000000	-2,105E + 00	8,158E + 00	6,131E - 02
3	0,4200000000000000	0,4800000000000000	0,4500000000000000	3,138E - 01	-6,605E - 01	-5,740E - 03
4	0,4200000000000000	0,4500000000000000	0,4350000000000000	-1,171E + 00	2,466E + 00	2,778E - 02
5	0,4350000000000000	0,4500000000000000	0,4425000000000000	-5,245E - 01	6,143E - 01	1,102E - 02
6	0,4425000000000000	0,4500000000000000	0,4462500000000000	-1,343E - 01	7,047E - 02	2,641E - 03
7	0,4462500000000000	0,4500000000000000	0,4481250000000000	8,167E - 02	-1,097E - 02	-1,550E - 03
8	0,4462500000000000	0,4481250000000000	0,4471875000000000	-2,824E - 02	3,794E - 03	5,454E - 04
9	0,4471875000000000	0,4481250000000000	0,4476562500000000	2,623E - 02	-7,407E - 04	-5,022E - 04
10	0,4471875000000000	0,4476562500000000	0,4474218750000000	-1,124E - 03	3,173E - 05	2,161E - 05
15	0,4474218750000000	0,447436523437500	0,447429199218750	-2,725E - 04	3,061E - 07	5,239E - 06
20	0,447431488037109	0,447431945800781	0,447431716918945	2,018E - 05	-1,296E - 10	-3,881E - 07
25	0,447431530952454	0,447431545257568	0,447431538105011	-6,026E - 07	8,640E - 13	1,159E - 08
30	0,447431543022394	0,447431543469429	0,447431543245911	-4,979E - 09	1,542E - 16	9,574E - 11
35	0,447431543287821	0,447431543301791	0,447431543294806	7,043E - 10	-7,578E - 20	-1,354E - 11
40	0,447431543288694	0,447431543289131	0,447431543288912	1,928E - 11	-1,176E - 22	-3,706E - 13
45	0,447431543288735	0,447431543288749	0,447431543288742	-5,471E - 13	7,352E - 25	1,066E - 14
47	0,447431543288745	0,447431543288749	0,447431543288747	4,441E - 14	-7,139E - 27	0,000E + 00
48	0,447431543288745	0,447431543288747	0,447431543288746	-5,418E - 14	8,710E - 27	0,000E + 00

**Solución 6.b** Regula-Falsi

Partimos de  $x_0 = 0$ ;  $z_0 = 0,48$  y aplicamos:

$$\mu_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(z_k)}(x_k - z_k) = \frac{z_k f(x_k) - x_k f(z_k)}{f(x_k) - f(z_k)}$$

$$\text{Si } f(\mu_k)f(x_k) \begin{cases} < 0 \rightarrow x_{k+1} = x_k; z_{k+1} = \mu_k \\ = 0 \rightarrow \alpha = \mu_k \\ > 0 \rightarrow x_{k+1} = \mu_k; z_{k+1} = z_k \end{cases}$$

Esperamos convergencia aproximadamente lineal.

**Solución 6.c** Secante

Partimos de  $x_0 = 0$ ;  $x_1 = 0,48$  y aplicamos:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} = \frac{x_{k-1} f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

Esperamos convergencia superlineal de orden  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618$ .

Se puede observar que tanto el método de Bisección como el de *Regula-Falsi* convergen lentamente.

El método secante no converge para  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 0,48$ . Sin embargo, es muy rápido para  $x_0 = 0,4$ ,  $x_1 = 0,48$ .

Tabla 19: Ej. 6b: Ejemplo de aplicación del método de *Regula-Falsi*

$k$	$x_k$	$z_k$	$\mu_k$	$f(\mu_k)$	$f(x_k) f(\mu_k)$	$r_k = \frac{\alpha - \mu_k}{\alpha}$
0	0,0000000000000000	0,4800000000000000	0,181194241690512	-5,360E + 00	3,216E + 01	5,950E - 01
1	0,181194241690512	0,4800000000000000	0,286187165822290	-4,742E + 00	2,542E + 01	3,604E - 01
2	0,286187165822290	0,4800000000000000	0,348981227423906	-4,053E + 00	1,922E + 01	2,200E - 01
3	0,348981227423906	0,4800000000000000	0,387052621184471	-3,301E + 00	1,338E + 01	1,349E - 01
4	0,387052621184471	0,4800000000000000	0,410304719883756	-2,546E + 00	8,403E + 00	8,298E - 02
5	0,410304719883756	0,4800000000000000	0,424566482926005	-1,860E + 00	4,734E + 00	5,110E - 02
6	0,424566482926005	0,4800000000000000	0,433336313016866	-1,295E + 00	2,408E + 00	3,150E - 02
7	0,433336313016866	0,4800000000000000	0,438737408614391	-8,685E - 01	1,125E + 00	1,943E - 02
8	0,438737408614391	0,4800000000000000	0,442066949081701	-5,664E - 01	4,919E - 01	1,199E - 02
9	0,442066949081701	0,4800000000000000	0,444120661758188	-3,623E - 01	2,052E - 01	7,400E - 03
10	0,444120661758188	0,4800000000000000	0,445387878162835	-2,287E - 01	8,286E - 02	4,568E - 03
15	0,447134701747684	0,4800000000000000	0,447248279025501	-2,123E - 02	7,284E - 04	4,096E - 04
20	0,447404916875548	0,4800000000000000	0,447415104357734	-1,910E - 03	5,909E - 06	3,674E - 05
25	0,447429154821945	0,4800000000000000	0,447430068666389	-1,714E - 04	4,759E - 08	3,296E - 06
30	0,447431329035498	0,4800000000000000	0,447431411010301	-1,538E - 05	3,829E - 10	2,956E - 07
35	0,447431524069526	0,4800000000000000	0,447431531422935	-1,379E - 06	3,081E - 12	2,652E - 08
40	0,447431541564719	0,4800000000000000	0,447431542224344	-1,237E - 07	2,479E - 14	2,379E - 09
45	0,447431543134096	0,4800000000000000	0,447431543193266	-1,110E - 08	1,995E - 16	2,134E - 10
50	0,447431543274874	0,4800000000000000	0,447431543280182	-9,956E - 10	1,605E - 18	1,914E - 11
55	0,447431543287502	0,4800000000000000	0,447431543287978	-8,930E - 11	1,292E - 20	1,717E - 12
60	0,447431543288635	0,4800000000000000	0,447431543288678	-8,007E - 12	1,040E - 22	1,541E - 13
65	0,447431543288737	0,4800000000000000	0,447431543288740	-7,283E - 13	8,532E - 25	1,410E - 14
70	0,447431543288746	0,4800000000000000	0,447431543288746	-7,105E - 14	7,384E - 27	0,000E + 00
71	0,447431543288746	0,4800000000000000	0,447431543288746	-4,619E - 14	3,282E - 27	0,000E + 00

Tabla 20: Ej. 6c: Ejemplo de aplicación del método Secante

$k$	$x_k$	$r_k = \frac{\alpha - \mu_k}{\alpha}$
0	0,4000000000000000	1,060084922491E - 01
1	0,4800000000000000	-7,278980930103E - 02
2	0,418240449937923	6,524147389400E - 02
3	0,429444232066420	4,020125870008E - 02
4	0,457230361057407	-2,190014967795E - 02
5	0,444112050716810	7,418995423384E - 03
6	0,446817662750469	1,372009969984E - 03
7	0,447469927757018	-8,578847165919E - 05
8	0,447431099172228	9,925909904007E - 07
9	0,447431542967413	7,181742978091E - 10
10	0,447431543288749	-5,995204332976E - 15
11	0,447431543288747	0,000000000000E + 00
12	0,447431543288747	0,000000000000E + 00

- 7.— Se desea hallar el inverso de un número  $b > 0$  cualquiera, sin realizar ninguna operación de división. Sea  $\beta$  ( $0,1 < \beta < 1$ ) la mantisa del número  $b$  en base decimal, y sea  $e$  su exponente, esto es

$$b = \beta \cdot 10^e; \quad 0,1 \leq \beta < 1.$$

Obviamente, la parte correspondiente al exponente puede invertirse fácilmente mediante un cambio de signo. Para invertir la mantisa se propone aplicar el método de Newton para calcular la raíz de la función  $f(x) = \beta - (1/x)$ . Se pide:

- Aplicar el método de Newton a la función dada, y simplificar al máximo su expresión de forma que en la fórmula final del algoritmo no se utilice la división.
- Estudiar gráficamente el comportamiento del método de Newton en este caso, y deducir un valor inicial  $x_0$  que garantice la convergencia del algoritmo.
- Calcular mediante el algoritmo propuesto el inverso de  $b = 0,39000 \cdot 10^{-1}$ . Comentar los resultados.

### Solución 7.

$$b = \beta \cdot 10^e \quad 0,1 < \beta < 1 \quad \implies \quad b^{-1} = \beta^{-1} \cdot 10^{-e}$$

Para calcular  $\beta^{-1}$  planteamos  $f(x) = \beta - \frac{1}{x} = 0$ ;  $\alpha = \frac{1}{\beta} \in (1, 10)$

#### Solución 7.a Newton-Raphson:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \beta - \frac{1}{x} \\ f'(x) = \frac{1}{x^2} \end{array} \right\} \implies x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = \phi(x_k)$$

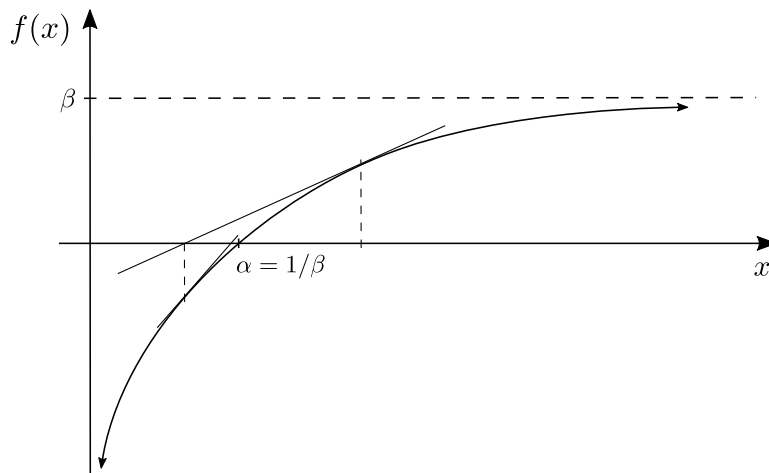
$$\begin{aligned} \phi(x) &= x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{\beta - 1/x}{1/x^2} \\ &= x - (\beta x^2 - x) = 2x - \beta x^2 \\ &= x(2 - \beta x) \end{aligned}$$

Luego  $x_{k+1} = \phi(x_k)$  con  $\phi(x) = x(2 - \beta x)$ .

El método será de segundo orden pues  $f'(\alpha) \neq 0$  para  $\alpha = 1/\beta$

#### Solución 7.b)





Observamos que para  $\begin{cases} x_k < \alpha \rightsquigarrow x_{k+1} > x_k & \text{y } x_k < \alpha \Rightarrow \text{OK} \\ x_k > \alpha \rightsquigarrow x_{k+1} > x_k & \Rightarrow \text{Caso anterior} \end{cases}$

Luego lo razonable parece ser comenzar con un  $x_0 < \alpha$ . Como  $1 < \alpha < 10$  podemos emplear  $x_0 = 1$ .

**Solución 7.c)**

Para  $b = 0,39999 \cdot 10^{-1} \Rightarrow \beta = 0,39$ .

Tomamos como valor inicial  $x_0 = 1$  e iteramos  $x_{k+1} = x_k(2 - \beta x_k)$

Tabla 21: Ej. 7c: Ejemplo de aplicación del método de Newton-Raphson

$\beta = 0,39$

$k$	$x_k$	$f(x_k)$	$r_k = \frac{\alpha - \mu_k}{\alpha}$
0	1,0000000000000000	-6,100000000000E - 01	6,100000000000E - 01
1	1,6100000000000000	-2,311180124224E - 01	3,721000000000E - 01
2	2,2090810000000000	-6,267692764548E - 02	1,384584100000E - 01
3	2,514946842821210	-7,622718291025E - 03	1,917073129973E - 02
4	2,563160212978030	-1,433843022007E - 04	3,675169385664E - 04
5	2,564102217772560	-5,267680019960E - 08	1,350687001134E - 07
6	2,564102564102520	-7,105427357601E - 15	1,820765760385E - 14
7	2,564102564102560	0,000000000000E + 00	0,000000000000E + 00
8	2,564102564102560	0,000000000000E + 00	0,000000000000E + 00

Se observa que la convergencia es cuadrática, y obtenemos 16 cifras significativas en sólo 8 iteraciones.

8.— En un problema estructural se requiere resolver el problema del pandeo de una viga biarticulada, con un muelle elástico coaccionando el giro en uno de sus apoyos. Se desea solucionar este problema, para cualesquiera valores de las variables que definen el sistema, a saber, la longitud  $L$  de la viga, su rigidez a flexión  $EI$ , y la constante elástica  $K_\phi$  del muelle.

Se deduce, mediante el equilibrio de la viga deformada, que la carga que produce la inestabilidad de la geometría recta de la viga, también denominada carga de pandeo  $P$ , viene dada por la menor de las soluciones no triviales de la ecuación:

$$\tan(kL) = \frac{kL}{\frac{(kL)^2}{k_\phi} + 1}$$

donde  $k = \frac{P}{EI}$  y  $k_\phi = \frac{K_\phi L}{EI}$ . Se pretende resolver esta ecuación mediante un método numérico que funcione para valores arbitrarios de los datos. Para ello se escribe la expresión inicial en la forma equivalente, pero más compacta:

$$\tan(x) = \frac{x}{(cx)^2 + 1},$$

siendo la nueva incógnita  $x = kL$ , y siendo  $c = \sqrt{1/k_\phi}$  un parámetro que se calcula en función de los datos. Obviamente, interesa calcular la menor de las raíces positivas no triviales de la ecuación anterior. Para ello se propone el siguiente algoritmo numérico: partiendo de un determinado valor inicial convenientemente elegido, se iterará hasta convergencia mediante las fórmulas

$$y^k = g(x^k); \quad g(x) = \frac{x}{(cx)^2 + 1}$$

$$x^{k+1} = f^{-1}(y^k); \quad f(x) = \tan(x)$$

siendo  $f^{-1}$  la función inversa de  $f$ . Se pide:

- Realizar un estudio analítico de la convergencia asintótica del algoritmo planteado en función del parámetro  $c$ .
- Dibujar aproximadamente las funciones  $f(x)$  y  $g(x)$ , y acotar un intervalo en donde se halle la solución del problema en función del parámetro  $c > 0$ .
- Proponer razonadamente un valor inicial que funcione para cualquier valor de  $c$ .
- Iterar hasta convergencia, para los siguientes valores del parámetro  $c$ ;  $c = 0,1$ ,  $c = 0,5$ ,  $c = 1$ ,  $c = 100$ ,  $c = 1000$ . Comentar los resultados obtenidos.

## Solución 8.

### Solución 8.a

Pretendemos hallar la solución de  $f(x) = g(x)$  con

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \tan(x) \\ g(x) = \frac{x}{(cx)^2 + 1} \end{array} \right\} \quad \text{mediante el algoritmo:} \quad \left\{ \begin{array}{l} y_k = g(x_k) \\ x_{k+1} = f^{-1}(y_k) \end{array} \right.$$

Lo que en realidad hacemos es resolver el problema de la forma:  $x = f^{-1}(g(x))$  mediante el método de aproximaciones sucesivas, es decir:

$$x_{k+1} = \phi(x_k) \quad \text{con} \quad \phi(x) = f^{-1}(g(x)) \quad \begin{cases} f(x) = \tan(x) \\ g(x) = \frac{x}{(cx)^2 + 1} \end{cases}$$

El método será convergente si  $|\phi'(\alpha)| < 1$  en el punto  $\alpha = \phi(\alpha)$

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= \frac{d}{dx} [f^{-1}(g(x))] = \frac{d}{dy} f^{-1}(y) \Big|_{y=g(x)} \frac{dg(x)}{dx} \\ &= \frac{1}{\left[ \frac{df(z)}{dz} \Big|_{z=f^{-1}(y)} \right] \Big|_{y=g(x)}} \frac{dg(x)}{dx} = \frac{1}{f'(f^{-1}(g(x)))} g'(x) \end{aligned}$$

Luego:

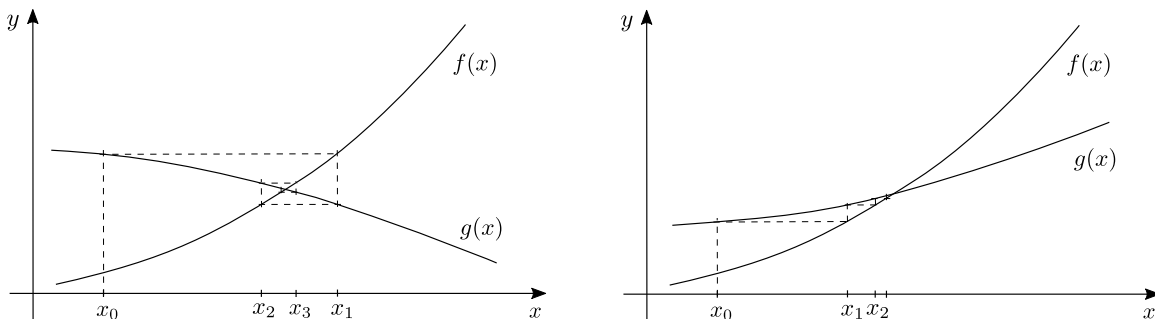
$$\phi'(\alpha) = \frac{1}{f'(f^{-1}(g(\alpha)))} g'(\alpha) = \frac{1}{f'(\alpha)} g'(\alpha)$$

Por tanto,

$$|\phi'(\alpha)| = \left| \frac{g'(\alpha)}{f'(\alpha)} \right| \quad \text{y} \quad |\phi'(\alpha)| < 1 \iff \boxed{|g'(\alpha)| < |f'(\alpha)|}$$

Para verificar si esta condición se cumple, debemos dibujar las curvas  $g(x)$  y  $f(x)$ . En el apartado siguiente se analizan las curvas de este problema.

Obsérvese que las iteraciones se realizan en la forma siguiente:

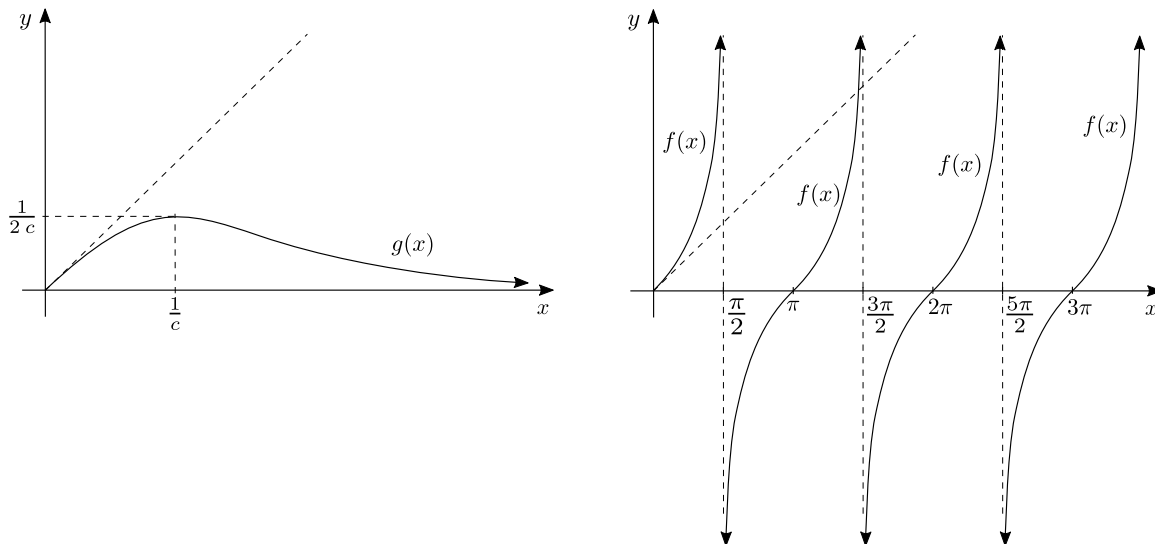


**Solución 8.b**

$$g(x) = \frac{x}{(cx)^2 + 1} \quad \rightarrow \quad g'(x) = \frac{((cx)^2 + 1) - x(2c^2x)}{((cx)^2 + 1)^2}$$

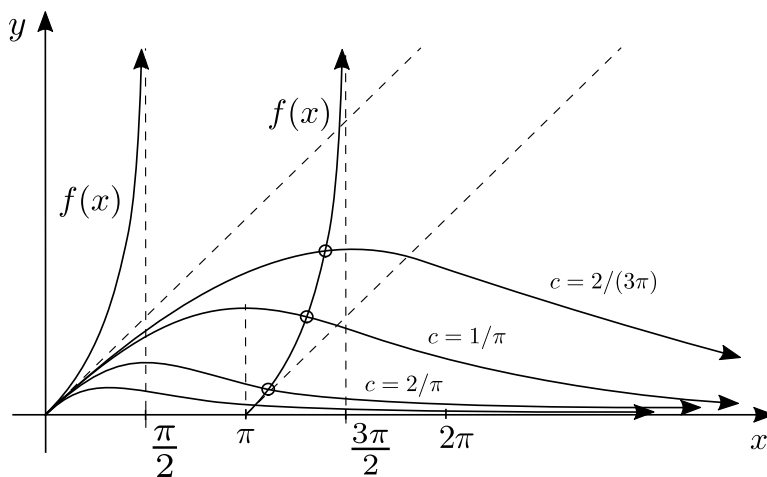
Luego:

$$\begin{cases} g'(0) = 1 \\ g'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{c} \Rightarrow g(1/c) = \frac{1}{2c} \end{cases}$$



Luego la raíz que buscamos (menor de las positivas no triviales) se produce siempre en el intervalo  $(\pi, 3\pi/2) \quad \forall c > 0$

Para distintos valores del parámetro  $c$  se producen las situaciones siguientes:



Observamos que  $f'(\alpha) > 1$  siempre.

Para  $g(x)$  la máxima pendiente que se puede producir se dará en el punto tal que  $g''(x) = 0$  (inflexión), o en  $x = 0$

$$\begin{aligned}
 g''(x) &= \frac{-2c^2x(1+c^2x^2)^2 - 2(1+c^2x^2)2c^2x(1-c^2x^2)}{(1+c^2x^2)^4} \\
 &= \frac{-2c^2x(1+c^2x^2) - 4c^2x(1-c^2x^2)}{(1+c^2x^2)^3} = \frac{2c^2x(3-c^2x^2)}{(1+c^2x^2)^3}
 \end{aligned}$$

$$\text{Luego } g''(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \rightarrow g'(0) = 1 \\ x = \frac{\sqrt{3}}{c} & \rightarrow g'(\frac{\sqrt{3}}{c}) = -\frac{1}{8} \end{cases}$$

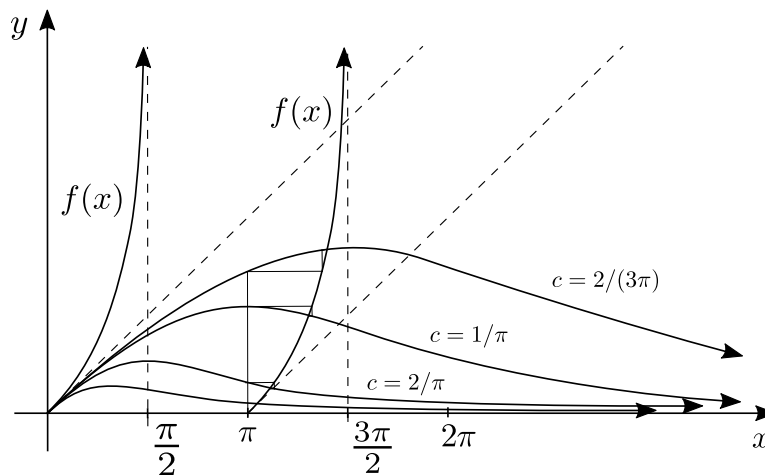
A la vista de la función  $g(x)$ , por tanto, se cumple que  $|g'(\alpha)| < 1$

Luego:

$$|g'(\alpha)| < |f'(\alpha)| \text{ en todo caso } \Rightarrow \text{ El algoritmo es convergente } \forall c$$

**Solución 8.c**

A la vista del gráfico anterior parece que el método funcionará siempre si empezamos con  $x_0 = \pi$ , ya que:



**Solución 8.d**

Es necesario en este punto tener la precaución de que  $f^{-1}(y_k)$  debe dar valores del arcotangente entre  $(\pi$  y  $3\pi/2)$  y no entre  $(0$  y  $\pi/2)$ . Luego programaremos  $f^{-1}(y_k) = \arctan(y_k) + \pi$ . Este punto es muy importante dado que la función  $f(x) = \tan(x)$  no tiene una sólo inversa. Puesto que nos interesa trabajar en el intervalo  $(\pi, 3\pi/2)$  tenemos que utilizar la expresión de la inversa en ese intervalo.

Tabla 22: Ej. 8d: Ejemplos de aplicación de métodos de aproximaciones sucesivas ( $c = 0,1$ )

$k$	$x_k$	$y_k = g(x_k)$	$f(x_k)$	$f(x_k) - g(x_k)$	$r_k = (\alpha - x_k)/\alpha$
0	3,141592653589790	2,859382875468550	0,000000000000000	-2,859E + 00	2,939E - 01
1	4,375958446715440	3,672677063148310	2,859382875468550	-8,133E - 01	1,650E - 02
2	4,446552401691690	3,712519434872770	3,672677063148300	-3,984E - 02	6,359E - 04
3	4,449274819624000	3,714041450086730	3,712519434872770	-1,522E - 03	2,404E - 05
4	4,44937738800720	3,714098967760040	3,714041450086720	-5,752E - 05	9,081E - 07
5	4,449381626622730	3,714101140488050	3,714098967760040	-2,173E - 06	3,430E - 08
6	4,449381773482860	3,714101222561500	3,714101140488050	-8,207E - 08	1,296E - 09
7	4,449381779030410	3,714101225661770	3,714101222561490	-3,100E - 09	4,895E - 11
8	4,449381779239960	3,714101225778880	3,714101225661760	-1,171E - 10	1,849E - 12
9	4,449381779247880	3,714101225783300	3,714101225778880	-4,425E - 12	6,983E - 14
10	4,449381779248180	3,714101225783470	3,714101225783310	-1,639E - 13	0,000E + 00
11	4,449381779248190	3,714101225783470	3,714101225783460	0,000E + 00	0,000E + 00
12	4,449381779248190	3,714101225783480	3,714101225783480	0,000E + 00	0,000E + 00

Tabla 23: Ej. 8d: Ejemplos de aplicación de métodos de aproximaciones sucesivas ( $c = 0,5$ )

$k$	$x_k$	$y_k = g(x_k)$	$f(x_k)$	$f(x_k) - g(x_k)$	$r_k = (\alpha - x_k)/\alpha$
0	3,141592653589790	0,906036700900580	0,000000000000000	$-9,060E - 01$	$1,795E - 01$
1	3,877732955782450	0,814786168455241	0,906036700900580	$9,125E - 02$	$-1,276E - 02$
2	3,825284748827560	0,821193604576772	0,814786168455240	$-6,407E - 03$	$9,343E - 04$
3	3,829123593373330	0,820723421569361	0,821193604576772	$4,702E - 04$	$-6,836E - 05$
4	3,828842714862010	0,820757817413532	0,820723421569361	$-3,440E - 05$	$5,002E - 06$
5	3,828863266685940	0,820755300643011	0,820757817413532	$2,517E - 06$	$-3,660E - 07$
6	3,828861762916590	0,820755484793998	0,820755300643010	$-1,842E - 07$	$2,678E - 08$
7	3,828861872946860	0,820755471319735	0,820755484793998	$1,347E - 08$	$-1,959E - 09$
8	3,828861864895980	0,820755472305642	0,820755471319735	$-9,859E - 10$	$1,434E - 10$
9	3,828861865485060	0,820755472233504	0,820755472305642	$7,214E - 11$	$-1,049E - 11$
10	3,828861865441960	0,820755472238782	0,820755472233503	$-5,279E - 12$	$7,676E - 13$
11	3,828861865445110	0,820755472238396	0,820755472238782	$3,862E - 13$	$-5,618E - 14$
12	3,828861865444880	0,820755472238424	0,820755472238396	$-2,853E - 14$	$4,219E - 15$
13	3,828861865444900	0,820755472238422	0,820755472238424	$0,000E + 00$	$0,000E + 00$
14	3,828861865444900	0,820755472238422	0,820755472238422	$0,000E + 00$	$0,000E + 00$

Tabla 24: Ej. 8d: Ejemplos de aplicación de métodos de aproximaciones sucesivas ( $c = 1$ )

$k$	$x_k$	$y_k = g(x_k)$	$f(x_k)$	$f(x_k) - g(x_k)$	$r_k = (\alpha - x_k)/\alpha$
0	3,141592653589790	0,289025482222236	0,000000000000000	$-2,890E - 01$	$7,752E - 02$
1	3,422950922702660	0,269172011522757	0,289025482222236	$1,985E - 02$	$-5,092E - 03$
2	3,404532597965240	0,270397527108780	0,269172011522757	$-1,226E - 03$	$3,158E - 04$
3	3,405674967431480	0,270321228132215	0,270397527108780	$7,630E - 05$	$-1,965E - 05$
4	3,405603865586900	0,270325975916208	0,270321228132215	$-4,748E - 06$	$1,223E - 06$
5	3,405608290053650	0,270325680470714	0,270325975916208	$2,954E - 07$	$-7,611E - 08$
6	3,405608014727870	0,270325698855683	0,270325680470714	$-1,838E - 08$	$4,736E - 09$
7	3,405608031860830	0,270325697711624	0,270325698855683	$1,144E - 09$	$-2,947E - 10$
8	3,405608030794680	0,270325697782817	0,270325697711624	$-7,119E - 11$	$1,834E - 11$
9	3,405608030861030	0,270325697778386	0,270325697782817	$4,430E - 12$	$-1,141E - 12$
10	3,405608030856900	0,270325697778662	0,270325697778386	$-2,758E - 13$	$7,105E - 14$
11	3,405608030857160	0,270325697778645	0,270325697778662	$1,721E - 14$	$-4,441E - 15$
12	3,405608030857140	0,270325697778646	0,270325697778645	$-9,992E - 16$	$0,000E + 00$
13	3,405608030857140	0,270325697778646	0,270325697778646	$0,000E + 00$	$0,000E + 00$

Tabla 25: Ej. 8d: Ejemplos de aplicación de métodos de aproximaciones sucesivas ( $c = 100$ )

$k$	$x_k$	$y_k = g(x_k)$	$f(x_k)$	$f(x_k) - g(x_k)$	$r_k = (\alpha - x_k)/\alpha$
0	3,141592653589790	0,000031830666106	0,000000000000000	$-3,183E - 05$	$1,013E - 05$
1	3,141624484255890	0,000031830343607	0,000031830666106	$3,225E - 10$	$-1,027E - 10$
2	3,141624483933390	0,000031830343611	0,000031830343607	$-3,497E - 15$	$0,000E + 00$
3	3,141624483933390	0,000031830343611	0,000031830343611	$5,579E - 17$	$0,000E + 00$

Tabla 26: Ej. 8d: Ejemplos de aplicación de métodos de aproximaciones sucesivas ( $c = 1000$ )

$k$	$x_k$	$y_k = g(x_k)$	$f(x_k)$	$f(x_k) - g(x_k)$	$r_k = (\alpha - x_k)/\alpha$
0	3,141592653589790	0,000000318309854	0,000000000000000	$-3,183E - 07$	$1,013E - 07$
1	3,141592971899650	0,000000318309822	0,000000318309854	$3,223E - 14$	$-1,021E - 14$
2	3,141592971899610	0,000000318309822	0,000000318309821	$-1,912E - 16$	$0,000E + 00$
3	3,141592971899610	0,000000318309822	0,000000318309821	$-1,912E - 16$	$0,000E + 00$

Observamos que el método converge linealmente con una velocidad de convergencia razonable, pues  $\phi'(\alpha) = \frac{|g'(\alpha)|}{|f'(\alpha)|}$  y  $|g'(\alpha)|$  es pequeño en comparación con  $|f'(\alpha)|$  en general.

De hecho, cuando  $c \rightarrow \infty$  sucede que  $|g'(\alpha)| \rightarrow 0$  y el método es prácticamente cuadrático, como se observa en el caso  $c = 1000$ .

Luego es lógico que el método funciona mejor para valores elevados de  $c$ . Además cuando  $c \rightarrow \infty$  entonces  $\alpha \rightarrow \pi$ , por lo que  $x_0$  es una muy buena de la raíz.

**9.**— La curva de caudales clasificados, empleada en estudios hidrológicos, es la curva que se obtiene al clasificar los caudales medios diarios de un año hidrológico cualquiera en función del número de días del año en que dicho caudal ha sido superado o igualado. Una expresión analítica de esta curva ha sido propuesta por Coutagne. Según este autor, esta curva toma la forma:

$$q(t) = Q_{mc} + \frac{(Q - Q_{mc})(1 + \nu)}{T^\nu} (T - t)^\nu,$$

dónde  $q(t)$  es el caudal igualado o rebasado durante  $t$  días en el curso de un período de observación de  $T$  días,  $Q$  es el caudal medio anual,  $Q_{mc}$  es el caudal mínimo característico (el igualado o superado en todos los días del año excepto en los 10 días más secos),  $Q_s$  es el caudal semipermanente (el igualado o superado en la mitad de los días del año), y  $\nu$  es el coeficiente de irregularidad cuyo valor se define como la mayor de las raíces de la función

$$f(\nu) = 2^\nu \kappa - (\nu + 1), \quad \text{donde} \quad \kappa = \frac{Q_s - Q_{mc}}{Q - Q_{mc}}.$$

Para calcular el coeficiente de irregularidad se propone la utilización del método de Newton. Se sabe que para los casos que se van estudiar el valor del coeficiente  $\kappa$  adopta valores que no difieren excesivamente de la unidad.

Se pide:

- Dibujar la función  $f(\nu)$  y plantear el esquema iterativo propuesto, desarrollando completamente y simplificando al máximo su expresión.
- Analizar la convergencia del método y explicar para que valores de  $\kappa$  se requerirán más iteraciones, teniendo en cuenta que se quiere obtener el mayor valor posible del coeficiente de irregularidad. Estudiar para qué valores iniciales converge el algoritmo.
- Aplicar el esquema iterativo desarrollado en los siguientes casos:
  - $Q_s = 100 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $Q_{mc} = 1 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $Q = 98,0000000000 \text{ m}^3/\text{s}$ .
  - $Q_s = 100 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $Q_{mc} = 1 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $Q = 94,2663845753 \text{ m}^3/\text{s}$ .

En los dos casos se utilizarán los valores iniciales  $\nu_0 = 0$  y  $\nu_0 = 1$ , y se compararán y comentarán los resultados.

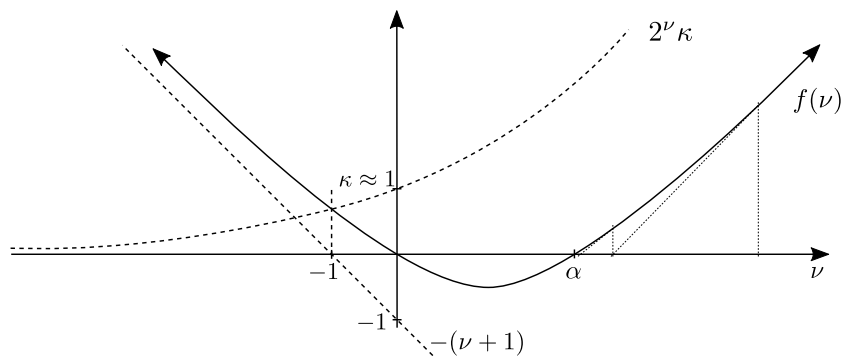
- d) Proponer otro algoritmo para resolver el último caso del apartado anterior y aplicarlo con los dos valores iniciales propuestos. Comentar los resultados.

### Solución 9.

Queremos buscar las raíces de la ecuación:

$$f(\nu) = 2^\nu \kappa - (\nu + 1) \quad \text{con} \quad \kappa \approx 1$$

### Solución 9.a



Para aplicar el Método de Newton-Raphson necesitamos:

$$\begin{aligned} f(\nu) &= 2^\nu \kappa - (\nu + 1) \\ f'(\nu) &= 2^\nu \kappa \ln(2) - 1 \end{aligned}$$

De modo que:

$$\begin{aligned} \nu_{k+1} = \phi(\nu_k); \quad \phi(\nu) &= \nu - \frac{f(\nu)}{f'(\nu)} = \nu - \frac{2^\nu \kappa - (\nu + 1)}{2^\nu \kappa \ln(2) - 1} \\ &= \frac{\nu 2^\nu \kappa \ln(2) - 2^\nu \kappa + \nu + 1}{2^\nu \kappa \ln(2) - 1} \\ &= \frac{2^\nu \kappa (\nu \ln(2) - 1) + 1}{2^\nu \kappa \ln(2) - 1} \end{aligned}$$

### Solución 9.b

Por el aspecto de la función, el método convergerá siempre para valores iniciales mayores que la raíz predominante.

El método requerirá más iteraciones cuando  $f'(\alpha) \rightarrow 0$ . Esto sucede para los valores mayores de  $\kappa$ .

El método incluso degenerará en uno de primer orden cuando la raíz sea doble, lo que sucede cuando:



$$\left. \begin{aligned} f(\nu) &= 2^\nu \kappa - (\nu + 1) = 0 \\ f'(\nu) &= 2^\nu \kappa \ln(2) - 1 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \nu = \frac{1}{\ln(2)} - 1 = 0,44269504089 \\ \kappa = \frac{1 + \nu}{2^\nu} = 1,06147569085 \end{cases}$$

**Solución 9.c**

Analizamos los casos:

$$\begin{cases} \kappa_1 = \frac{100 - 1}{98 - 1} = \frac{99}{97} = 1,0206185567 \\ \kappa_2 = \frac{100 - 1}{94,2663845753 - 1} = \frac{99}{93,2663845753} = 1,06147569085 \end{cases}$$

Partimos de  $\nu_0 = 0$  y de  $\nu_0 = 1$ .

Tabla 27: Ej. 9c: Aplicación del método de Newton-Raphson (raíz simple).

$\kappa = 1,02061855670103$				$\kappa = 1,02061855670103$			
$k$	$\nu_k$	$f(\nu_k)$	$r_k = \frac{\alpha - \nu_k}{\alpha}$	$k$	$\nu_k$	$f(\nu_k)$	$r_k = \frac{\alpha - \nu_k}{\alpha}$
0	1,0000000000000000	4,124E - 02	-1,293E - 01	0	0,0000000000000000	2,062E - 02	1,000E + 00
1	0,900604181831465	4,735E - 03	-1,704E - 02	1	0,070476064450964	1,238E - 03	6,423E - 02
2	0,885838234464342	9,946E - 05	-3,657E - 04	2	0,075289897819311	5,973E - 06	3,114E - 04
3	0,885514515243613	4,747E - 08	-1,747E - 07	3	0,075313350983297	1,421E - 10	7,409E - 09
4	0,885514360575589	1,066E - 14	-3,930E - 14	4	0,075313351541267	0,000E + 00	0,000E + 00
5	0,885514360575554	0,000E + 00	0,000E + 00	5	0,075313351541267	0,000E + 00	0,000E + 00
6	0,885514360575554	0,000E + 00	0,000E + 00				

**Solución 9.d**

En el caso de que la raíz sea prácticamente doble se puede comprobar que el método de Newton-Raphson presenta un comportamiento atípico. En este caso sucede que:

$$\left. \begin{aligned} f(\nu) &= 0 \\ f'(\nu) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{raíz doble} \Rightarrow \begin{cases} \text{Newton-Raphson pasa a ser de 1º orden} \\ \text{Hay problemas de estabilidad numérica al acercarnos a la solución} \end{cases}$$

Proponemos resolver el problema  $g(\nu) = f'(\nu) = 0$  por Newton-Raphson.

$$\begin{cases} g(\nu) = 2^\nu k \ln(2) - 1 \\ g'(\nu) = 2^\nu k (\ln(2))^2 \end{cases}$$

$$\nu_{k+1} = \phi(\nu_k) \quad \text{con} \quad \phi(\nu) = \nu - \frac{g(\nu)}{g'(\nu)} = \nu - \frac{2^\nu \kappa \ln(2) - 1}{2^\nu \kappa (\ln(2))^2}$$

$$= \nu - \frac{1}{\ln(2)} + \frac{1}{2^\nu \kappa (\ln(2))^2}$$

Finalmente comprobamos que la solución verifica  $f(\nu) = 0$  ya que no se impone inicialmente.

Tabla 28: Ej. 9c: Aplicación del método de Newton-Raphson (raíz doble).

$\kappa = 1,06147569080289$				$\kappa = 1,06147569080289$			
$k$	$\nu_k$	$f(\nu_k)$	$r_k = \frac{\alpha - \nu_k}{\alpha}$	$k$	$\nu_k$	$f(\nu_k)$	$r_k = \frac{\alpha - \nu_k}{\alpha}$
0	1,0000000000000000	1,230E - 01	-1,259E + 00	0	0,0000000000000000	6,148E - 02	1,000E + 00
1	0,739243373569765	3,268E - 02	-6,698E - 01	1	0,232649980218788	1,457E - 02	4,745E - 01
2	0,596045300412636	8,447E - 03	-3,464E - 01	2	0,340220019476420	3,555E - 03	2,315E - 01
3	0,520728270357000	2,149E - 03	-1,762E - 01	3	0,392064047412284	8,781E - 04	1,143E - 01
4	0,482063364671728	5,421E - 04	-8,890E - 02	4	0,417527612860319	2,182E - 04	5,682E - 02
5	0,462468727529052	1,361E - 04	-4,464E - 02	5	0,430147909909289	5,440E - 05	2,831E - 02
6	0,452604473391758	3,411E - 05	-2,235E - 02	6	0,436430562178420	1,358E - 05	1,412E - 02
7	0,447655437756846	8,537E - 06	-1,118E - 02	7	0,439565054815421	3,393E - 06	7,041E - 03
8	0,445176677671291	2,136E - 06	-5,576E - 03	8	0,441130586674439	8,479E - 07	3,505E - 03
9	0,443936249144733	5,340E - 07	-2,774E - 03	9	0,441912901009423	2,119E - 07	1,737E - 03
10	0,443315802252678	1,335E - 07	-1,373E - 03	10	0,442303897979993	5,296E - 08	8,542E - 04
11	0,443005580289624	3,337E - 08	-6,721E - 04	11	0,442499261702816	1,322E - 08	4,129E - 04
12	0,442850588941604	8,327E - 09	-3,220E - 04	12	0,442596720831132	3,291E - 09	1,927E - 04
13	0,442773360900202	2,067E - 09	-1,475E - 04	13	0,442645019850909	8,084E - 10	8,359E - 05
14	0,442735282830582	5,025E - 10	-6,150E - 05	14	0,442668337038374	1,884E - 10	3,092E - 05
15	0,442717266959403	1,125E - 10	-2,080E - 05	15	0,442678516827421	3,591E - 11	7,924E - 06
16	0,442709965207591	1,848E - 11	-4,309E - 06	16	0,442681652454445	3,407E - 12	8,412E - 07
17	0,442708179022127	1,106E - 12	-2,743E - 07	17	0,442682019635504	4,707E - 14	1,178E - 08
18	0,442708057572102	0,000E + 00	0,000E + 00	18	0,442682024851027	0,000E + 00	0,000E + 00
19	0,442708057572102	0,000E + 00	0,000E + 00	19	0,442682024851027	0,000E + 00	0,000E + 00
20	0,442708057572102	0,000E + 00	0,000E + 00				

Tabla 29: Ej. 9d: Aplicación del método de Newton-Raphson modificado (raíz doble).

$\kappa = 1,06147569080289$				$\kappa = 1,06147569080289$			
$k$	$\nu_k$	$g(\nu_k)$	$r_k = \frac{\alpha - \nu_k}{\alpha}$	$k$	$\nu_k$	$g(\nu_k)$	$r_k = \frac{\alpha - \nu_k}{\alpha}$
0	1,0000000000000000	4,715E - 01	-1,293E - 01	0	0,0000000000000000	-2,642E - 01	1,000E + 00
1	0,537717887565050	6,808E - 02	3,928E - 01	1	0,518130816019064	5,368E - 02	-1,704E - 01
2	0,445756784487373	2,124E - 03	4,966E - 01	2	0,444633307975891	1,344E - 03	-4,378E - 03
3	0,442698287526226	2,250E - 06	5,001E - 01	3	0,442696342399847	9,021E - 07	-2,940E - 06
4	0,442695040951332	2,532E - 12	5,001E - 01	4	0,442695040948267	4,068E - 13	-1,326E - 12
5	0,442695040947680	0,000E + 00	5,001E - 01	5	0,442695040947680	0,000E + 00	0,000E + 00
6	0,442695040947680	0,000E + 00	5,001E - 01	6	0,442695040947680	0,000E + 00	0,000E + 00

10.— Dado el sistema no lineal de  $n$  ecuaciones con  $n$  incógnitas

$$\underline{K}(\bar{x})\bar{x} = \bar{f}(\bar{x}),$$

donde la matriz  $\underline{K}(\bar{x})$  y el vector  $\bar{f}(\bar{x})$  son funciones de las incógnitas  $\bar{x}$ , se pide:

a) Diseñar y escribir, de forma suficientemente explícita, algoritmos que permitan resolver el sistema anterior por:

- Aproximaciones Sucesivas,
- Newton-Raphson,
- Newton,
- Whittaker,

indicando, si se da el caso, qué métodos son los idóneos para resolver los sistemas lineales subyacentes.

b) Discutir razonadamente, y teniendo en cuenta todos los aspectos relevantes (necesidades de almacenamiento, velocidad de convergencia, etc.), cuáles de los algoritmos diseñados serían preferibles en los casos siguientes:

- La matriz  $\underline{K}(\bar{x})$  es SIMÉTRICA, DEFINIDA POSITIVA y EN BANDA para todo valor de  $\bar{x}$ ,
- La matriz  $\underline{K}(\bar{x})$  y el vector  $\bar{f}(\bar{x})$  son POCO SENSIBLES respecto a  $\bar{x}$  (es decir que para obtener variaciones apreciables en sus componentes es preciso modificar de forma importante el valor de  $\bar{x}$ ).

### Solución 10.

Queremos resolver el sistema de ecuaciones no lineales:

$$\begin{aligned} \underline{K}(\bar{x})\bar{x} &= \bar{f}(\bar{x}); & \underline{K}(\bar{x}) &= [K_{ij}(\bar{x})] & ; & i = 1, \dots, n; & j = 1, \dots, n \\ \bar{f}(\bar{x}) &= \{f_i(\bar{x})\} & ; & i = 1, \dots, n \\ \bar{x} &= \{x_i\} & ; & i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

### Solución 10.a

#### Aproximaciones sucesivas

1) Si  $\underline{K}(\bar{x})$  es no singular ( $\det(\underline{K}(\bar{x})) \neq 0$ ) podemos plantear

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{\phi}(\bar{x}_k) \quad \text{con} \quad \bar{\phi}(\bar{x}) = \underline{K}^{-1}(\bar{x}) \bar{f}(\bar{x})$$

En la práctica, para obtener  $\bar{x}_{k+1}$  a partir de  $\bar{x}_k$  resolveremos el sistema de ecuaciones lineales:

$$\underline{K}(\bar{x}_k) \bar{x}_{k+1} = \bar{f}(\bar{x}_k)$$

2) En general podemos plantear

$$\bar{g}(\bar{x}) = \bar{0} \quad \text{con} \quad \bar{g}(\bar{x}) = \underline{K}(\bar{x}) \bar{x} - \bar{f}(\bar{x})$$

$$\underbrace{B \bar{g}(\bar{x}) + \bar{x}}_{\bar{\phi}(\bar{x})} = \bar{x} \quad \iff \quad \bar{g}(\bar{x}) = \bar{0} \quad \left( \text{si } \det(B) \neq 0 \right)$$

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{\phi}(\bar{x}_k) \quad \text{con} \quad \bar{\phi}(\bar{x}) = \underline{B} \left[ \underline{K}(\bar{x}) \bar{x} - \bar{f}(\bar{x}) \right] + \bar{x}$$

La matriz  $\underline{B}$  se elige de forma que  $\det(\underline{B}) \neq 0$ .

Si es posible se elegirá  $\underline{B} \approx - \left( \frac{d\bar{g}}{d\bar{x}} \Big|_{\bar{x}=\bar{\alpha}} \right)^{-1}$  siendo  $\bar{\alpha}$  la solución del problema.

Newton-Raphson

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{\phi}(\bar{x}_k) \quad \text{con} \quad \bar{\phi}(\bar{x}) = \bar{x} - \left[ \frac{d\bar{g}}{d\bar{x}} \right]^{-1} \bar{g}(\bar{x})$$

En la práctica para obtener  $\bar{x}_{k+1}$  en función de  $\bar{x}_k$ :

1. Resolvemos el sistema  $\left[ \frac{d\bar{g}}{d\bar{x}} \Big|_{\bar{x}=\bar{x}_k} \right] \Delta \bar{x}_k = -\bar{g}(\bar{x}_k)$

2. Y actualizamos la aproximación de la solución como:  $\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k + \Delta \bar{x}_k$

donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{g}(\bar{x}) = \{g_i(\bar{x})\}; \quad i = 1, \dots, n \\ g_i(\bar{x}) = \sum_{j=1, n} K_{i,j}(\bar{x}) x_j - f_i(\bar{x}) \\ \left[ \frac{d\bar{g}}{d\bar{x}} \right] = \underline{A}(\bar{x}) = [a_{i,j}(\bar{x})]; \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, n \\ a_{i,j}(\bar{x}) = \frac{\partial g_i(\bar{x})}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sum_{\ell=1, n} K_{i,\ell}(\bar{x}) x_\ell - f_i(\bar{x}) \right) = \sum_{\ell=1, n} \frac{\partial K_{i,\ell}(\bar{x})}{\partial x_j} x_\ell + K_{i,j}(\bar{x}) - \frac{\partial f_i(\bar{x})}{\partial x_j} \end{array} \right.$$

Newton (Simple)

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{\phi}(\bar{x}_k) \quad \text{con} \quad \bar{\phi}(\bar{x}) = \bar{x} - \left( \text{diag} \left[ \frac{d\bar{g}}{d\bar{x}} \right] \right)^{-1} \bar{g}(\bar{x})$$

En la práctica,

$$(x_i)_{k+1} = (x_i)_k - \frac{g_i(\bar{x}_k)}{a_{i,i}(\bar{x}_k)}; \quad i = 1, \dots, n$$

con

$$a_{i,i}(\bar{x}) = \sum_{\ell=1, n} \frac{\partial K_{i,\ell}}{\partial x_i} x_\ell + K_{i,i}(\bar{x}) - \frac{\partial f_i(\bar{x})}{\partial x_i}$$

Whittaker

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{\phi}(\bar{x}_k) \quad \text{con} \quad \bar{\phi}(\bar{x}) = \bar{x} - \underline{C}^{-1} \bar{g}(\bar{x})$$

$\underline{C}$  se elige de forma que  $\det(\underline{C}) \neq 0$ . Si es posible se adoptará  $\underline{C} \approx \left( \frac{d\bar{g}}{d\bar{x}} \Big|_{\bar{x}=\bar{\alpha}} \right)$

En la práctica para obtener  $\bar{x}_{k+1}$  en función de  $\bar{x}_k$ . Para ello:

1. Resolvemos el sistema:  $\underline{C} \Delta \bar{x}_k = -\bar{g}(\bar{x}_k)$
2. Y actualizamos la aproximación como:  $\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k + \Delta \bar{x}_k$

Observamos que, en esencia, este método coincide con el de aproximaciones sucesivas propuesto con  $\underline{B} = -\underline{C}^{-1}$

Consideraciones generales

- Hay que resolver sistemas de ecuaciones en casi todos los casos.
- En el primer caso de aproximaciones sucesivas el método más adecuado dependerá de qué tipo de matriz sea  $\underline{K}(\bar{x})$ . Si no sabemos nada al respecto de esta matriz tendremos que usar el métodos de eliminación de Gauss con pivotamiento.
- En Newton-Raphson el método dependerá de qué tipo de matriz sea  $\underline{A}(\bar{x}) = \left[ \frac{d\bar{g}}{d\bar{x}} \right]$ . Si no sabemos nada con respecto a la matriz tendríamos que usar Gauss con pivotamiento.
- En el método de Whittaker, en general, se utilizará una matriz  $\underline{C}$  cuyo tratamiento resulte sencillo. El método má adecuado dependerá del tipo de matriz que elijamos. Si se elige una matriz  $\underline{C}$  que no tenga propiedades especiales (simétrica, definida positiva) tendremos que usar Gauss con pivotamiento.

**Solución 10.b**

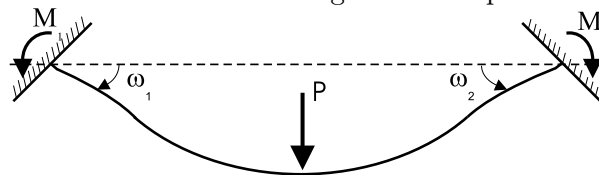
Analizamos los algoritmos para las condiciones establecidas.

1. Si  $\underline{K}$  es simétrica, definida positiva y en banda, el primer método de aproximaciones sucesivas será ventajoso (en principio) porque se puede utilizar el método de Cholesky para resolver los sistemas. La convergencia será lineal. El método de Newton-Raphson convergerá cuadráticamente, pero su coste por iteración será mucho mayo, pues  $\underline{A}(\bar{x})$  será una matriz llena no simétrica y no definida (en general). Es posible que el método de Newton sea competitivo frente a aproximaciones sucesivas, si efectivamente  $\text{diag} \left( \underline{A}(\bar{x}) \right)^{-1} \approx \underline{A}^{-1}(\bar{x})$
2. Si  $\underline{K}(\bar{x})$  y  $\bar{f}(\bar{x})$  son poco sensibles respecto al valor de  $\bar{x}$  entonces  $a_{i,j}(\bar{x}) \approx K_{i,j}(\bar{x}) \implies \underline{A}(\bar{x}) \approx \underline{K}(\bar{x})$ . Lo mejor es Whitakker con  $\underline{C} = \underline{K}(\bar{x}_0)$ . Este caso es muy habitual en ingeniería y por este motivo este método funcionará muy bien.

11.— Una viga de sección constante soporta una carga puntual aplicada en el centro del vano. Los extremos de la viga están empotrados de forma imperfecta. Por ello se produce un giro en cada empotramiento, aunque su valor es lógicamente inferior al que se produciría en una rótula. Se puede suponer que el momento que se opone al giro en cada extremo es proporcional a la raíz cuadrada del ángulo girado. Se definen las constantes positivas  $\theta$ ,  $\mu_1$  y  $\mu_2$  de forma que

$$\theta = \frac{PL^2}{16EI}, \quad M_1 = 6\frac{EI}{L}\mu_1\sqrt{\omega_1}, \quad M_2 = 6\frac{EI}{L}\mu_2\sqrt{\omega_2},$$

donde  $E$  es el módulo de elasticidad de la viga,  $I$  es el momento de inercia de la sección,  $L$  es la longitud del vano,  $P$  es la carga puntual aplicada en el centro del vano,  $M_1$  y  $M_2$  son los momentos que ejercen los empotramientos imperfectos sobre la viga, y  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , son los giros que se producen en los extremos. El convenio de signos es el representado en la figura adjunta.



Se pide:

- a) Demostrar que los giros  $\omega_1$  y  $\omega_2$  pueden obtenerse resolviendo el sistema no lineal

$$\underline{K}\bar{\omega} = \bar{\varphi}(\bar{\omega}), \quad \text{con } \bar{\omega} = \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{Bmatrix},$$

siendo

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} +4 & -2 \\ -2 & +4 \end{bmatrix}, \quad \bar{\varphi}(\omega) = \begin{Bmatrix} 2\theta - 6\mu_1\sqrt{\omega_1} \\ 2\theta - 6\mu_2\sqrt{\omega_2} \end{Bmatrix}.$$

- b) Resolver el problema mediante el método de aproximaciones sucesivas

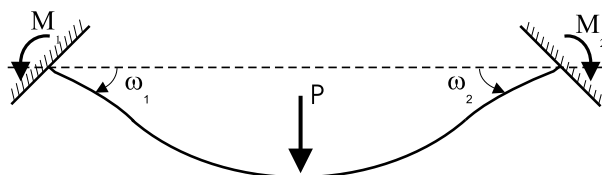
$$\bar{\omega}^{k+1} = \underline{K}^{-1}\bar{\varphi}(\bar{\omega}^k)$$

en el caso en que  $\mu_1 = 1/300$ ,  $\mu_2 = 23/450$ , y  $\theta = 10^{-2}$ . Se tomarán como aproximaciones iniciales los valores  $\omega_1^0 = \omega_2^0 = \theta/2$  (la mitad de los giros que se producirían si los empotramientos no ejerciesen ninguna resistencia al giro).

- c) Plantear y resolver el mismo problema mediante el método de Newton-Raphson utilizando la misma aproximación inicial.
- d) Plantear y resolver el mismo problema mediante el método de Newton (simple) utilizando la misma aproximación inicial.
- e) Comparar los resultados y la eficacia de los tres métodos en este caso.

**Solución 11.**

**Solución 11.a**



$$\text{con } \begin{cases} \theta = \frac{PL^2}{16EI} \\ M_1 = 6\frac{EI}{L}\mu_1\sqrt{\omega_1} \\ M_2 = 6\frac{EI}{L}\mu_2\sqrt{\omega_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega_1 = \frac{PL^2}{16EI} - M_1 \frac{L}{3EI} - M_2 \frac{L}{6EI} \\ \omega_2 = \frac{PL^2}{16EI} - M_1 \frac{L}{6EI} - M_2 \frac{L}{3EI} \end{cases} \iff \frac{L}{6EI} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{PL^2}{16EI} - \omega_1 \\ \frac{PL^2}{16EI} - \omega_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{6EI}{L} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \theta - \omega_1 \\ \theta - \omega_2 \end{Bmatrix} = \frac{6EI}{L} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \theta - \omega_1 \\ \theta - \omega_2 \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta - \omega_1 \\ \theta - \omega_2 \end{Bmatrix}$$

Luego

$$\frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta - \omega_1 \\ \theta - \omega_2 \end{Bmatrix} = \frac{6EI}{L} \begin{Bmatrix} \mu_1 \sqrt{\omega_1} \\ \mu_2 \sqrt{\omega_2} \end{Bmatrix}$$

Y por tanto:

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2\theta - 6\mu_1 \sqrt{\omega_1} \\ 2\theta - 6\mu_2 \sqrt{\omega_2} \end{Bmatrix}$$

### Solución 11.b Aproximaciones sucesivas

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (\omega_1)_{k+1} \\ (\omega_2)_{k+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2\theta - 6\mu_1 \sqrt{(\omega_1)_k} \\ 2\theta - 6\mu_2 \sqrt{(\omega_2)_k} \end{Bmatrix} \iff$$

$$\begin{Bmatrix} (\omega_1)_{k+1} \\ (\omega_2)_{k+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 2\theta - 6\mu_1 \sqrt{(\omega_1)_k} \\ 2\theta - 6\mu_2 \sqrt{(\omega_2)_k} \end{Bmatrix} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2\theta - 6\mu_1 \sqrt{(\omega_1)_k} \\ 2\theta - 6\mu_2 \sqrt{(\omega_2)_k} \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{Bmatrix} (\omega_1)_{k+1} \\ (\omega_2)_{k+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta - 2\mu_1 \sqrt{(\omega_1)_k} - \mu_2 \sqrt{(\omega_2)_k} \\ \theta - \mu_1 \sqrt{(\omega_1)_k} - 2\mu_2 \sqrt{(\omega_2)_k} \end{Bmatrix}}$$

Resolvemos el caso:  $\begin{Bmatrix} \mu_1 = 1/300 \\ \mu_2 = 23/450 \\ \theta = 10^{-2} \end{Bmatrix}$  partiendo de  $\begin{Bmatrix} (\omega_1)_0 = \theta/2 \\ (\omega_2)_0 = \theta/2 \end{Bmatrix}$

### Solución 11.c Newton-Raphson

$$\bar{f}(\bar{\omega}) = \underline{K}\bar{\omega} - \bar{\varphi}(\bar{\omega}) = \bar{0} \quad \longrightarrow \quad \bar{\omega}_{k+1} = \bar{\omega}_k - \left[ \frac{d\bar{f}}{d\bar{\omega}} \Big|_{\bar{\omega}=\bar{\omega}_k} \right]^{-1} \bar{f}(\bar{\omega}_k)$$

Tabla 30: Ej. 11b: Aplicación del método de aproximaciones sucesivas.

$\theta =$	0,010000000000000		$\omega_1 =$	0,003333333333333	
			$\omega_2 =$	0,051111111111111	
$K =$	4,000000000000000	-2,000000000000000			
	-2,000000000000000	4,000000000000000			
$K^{-1} =$	0,333333333333333	0,166666666666667			
	0,166666666666667	0,333333333333333			

$k$	$\bar{\omega}_k$	$\bar{f}(\bar{\omega}_k)$	$K\bar{\omega}_k - \bar{f}(\bar{\omega}_k)$	$\bar{e}_k = \bar{\omega} - \bar{\omega}_k$	$ \bar{e}_k $
0	0,005000000000000 0,005000000000000	0,018585786437627 -0,001684607956387	-0,008585786437627 0,011684607956388	-1,400E - 03 1,400E - 03	1,980E - 03
1	0,005914494153144 0,002536095087475	0,018461885029896 0,004556371748844	0,000123901407731 -0,006240979705232	-4,855E - 04 -1,064E - 03	1,169E - 03
2	0,006913356968106 0,004595771421264	0,018337068014848 -0,000789583211465	0,000124817015048 0,005345954960309	5,134E - 04 9,958E - 04	1,120E - 03
3	0,005980758803038 0,002792983598653	0,018453292684049 0,003793069665178	-0,000116224669202 -0,004582652876644	-4,192E - 04 -8,070E - 04	9,094E - 04
4	0,006783275838880 0,004339905335734	0,018352787100721 -0,000202573752882	0,000100505583329 0,003995643418060	3,833E - 04 7,399E - 04	8,333E - 04
5	0,006083833408093 0,002991273265826	0,018440021358083 0,003227622933342	-0,000087234257362 -0,003430196686224	-3,162E - 04 -6,087E - 04	6,859E - 04
6	0,006684610941585 0,004149211204128	0,018364810599156 0,000246259529525	0,000075210758927 0,002981363403817	2,846E - 04 5,492E - 04	6,186E - 04
7	0,006162646787973 0,003142888276368	0,018429949454575 0,002807816255578	-0,000065138855419 -0,002561556726053	-2,374E - 04 -4,571E - 04	5,151E - 04
8	0,006611285860788 0,004007596994289	0,018373803719007 0,000586287503800	0,000056145735568 0,002221528751778	2,113E - 04 4,076E - 04	4,591E - 04
9	0,006222315823636 0,003257729787768	0,018422366858407 0,002496532113871	-0,000048563139399 -0,001910244610070	-1,777E - 04 -3,423E - 04	3,856E - 04
10	0,006556877638447 0,003902571847691	0,018380509013493 0,000842359192201	0,000041857844914 0,001654172921670	1,569E - 04 3,026E - 04	3,408E - 04
20	0,006435572888894 0,003668577755659	0,018395559550635 0,001425572500555	0,000009576493625 0,000377592744291	3,557E - 05 6,858E - 05	7,726E - 05
30	0,006408104915720 0,003615623106032	0,018398987206082 0,001560117507769	0,000002186244734 0,000086165084919	8,105E - 06 1,562E - 05	1,760E - 05
40	0,006401849115242 0,003603564286366	0,018399768877288 0,001590893521652	0,000000499010948 0,000019665393328	1,849E - 06 3,564E - 06	4,015E - 06
50	0,006400422006467 0,003600813439725	0,018399947250061 0,001597921327007	0,000000113896358 0,000004488418959	4,220E - 07 8,134E - 07	9,164E - 07
60	0,006400096317769 0,003600185657352	0,018399987960324 0,001599525548439	0,000000025996048 0,000001024445432	9,632E - 08 1,857E - 07	2,092E - 07
70	0,006400021983715 0,003600042374706	0,018399997252038 0,001599891709403	0,000000005933410 0,000000233821992	2,198E - 08 4,237E - 08	4,774E - 08
80	0,006400005017616 0,003600009671705	0,018399999372798 0,001599975283438	0,000000001354257 0,000000053368148	5,018E - 09 9,672E - 09	1,090E - 08
90	0,006400001145234 0,003600002207495	0,018399999856846 0,001599994358624	0,000000000309099 0,000000012180888	1,145E - 09 2,207E - 09	2,487E - 09
100	0,006400000261391 0,003600000503845	0,018399999967326 0,001599998712397	0,000000000070550 0,000000002780199	2,614E - 10 5,038E - 10	5,676E - 10
150	0,006400000000162 0,0036000000000312	0,018399999999980 0,001599999999202	0,000000000000044 0,000000000001722	1,619E - 13 3,121E - 13	3,516E - 13
194	0,006400000000000 0,003600000000000	0,018400000000000 0,001599999999999	0,000000000000000 0,000000000000003	2,429E - 16 4,684E - 16	5,276E - 16
195	0,006400000000000 0,003600000000000	0,018400000000000 0,001600000000001	0,000000000000000 -0,000000000000002	-2,099E - 16 -4,046E - 16	4,558E - 16



$$\begin{aligned} \bar{f}(\bar{\omega}_k) &= \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (\omega_1)_k \\ (\omega_2)_k \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 2\theta - 6\mu_1\sqrt{(\omega_1)_k} \\ 2\theta - 6\mu_2\sqrt{(\omega_2)_k} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} -2\theta + 4(\omega_1)_k + 6\mu_1\sqrt{(\omega_1)_k} - 2(\omega_2)_k \\ -2\theta + 4(\omega_2)_k + 6\mu_2\sqrt{(\omega_2)_k} - 2(\omega_1)_k \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\bar{f}}{d\bar{\omega}} \Big|_{\bar{\omega}=\bar{\omega}_k} \right] &= \underline{K} - \frac{d\bar{\varphi}(\bar{\omega})}{d\bar{\omega}} \Big|_{\bar{\omega}=\bar{\omega}_k} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3\mu_1\sqrt{(\omega_1)_k} & 0 \\ 0 & 3\mu_2\sqrt{(\omega_2)_k} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 + 3\mu_1\sqrt{(\omega_1)_k} & -2 \\ -2 & 4 + 3\mu_2\sqrt{(\omega_2)_k} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{Bmatrix} (\omega_1)_{k+1} \\ (\omega_2)_{k+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (\omega_1)_k \\ (\omega_2)_k \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 + 3\mu_1\sqrt{(\omega_1)_k} & -2 \\ -2 & 4 + 3\mu_2\sqrt{(\omega_2)_k} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -2\theta + 4(\omega_1)_k + 6\mu_1\sqrt{(\omega_1)_k} - 2(\omega_2)_k \\ -2\theta + 4(\omega_2)_k + 6\mu_2\sqrt{(\omega_2)_k} - 2(\omega_1)_k \end{Bmatrix}$$

El cálculo se realiza en la forma:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} (\omega_1)_{k+1} \\ (\omega_2)_{k+1} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} (\omega_1)_k \\ (\omega_2)_k \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} (\Delta\omega_1)_k \\ (\Delta\omega_2)_k \end{Bmatrix}, \quad \text{con} \\ \begin{bmatrix} 4 + 3\mu_1\sqrt{(\omega_1)_k} & -2 \\ -2 & 4 + 3\mu_2\sqrt{(\omega_2)_k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (\Delta\omega_1)_k \\ (\Delta\omega_2)_k \end{Bmatrix} &= - \begin{Bmatrix} -2\theta + 4(\omega_1)_k + 6\mu_1\sqrt{(\omega_1)_k} - 2(\omega_2)_k \\ -2\theta + 4(\omega_2)_k + 6\mu_2\sqrt{(\omega_2)_k} - 2(\omega_1)_k \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Resolvemos el mismo caso de antes pero con el método de Newton-Raphson.

Tabla 31: Ej. 11c: Aplicación del método de Newton-Raphson.

$\theta = 0,0100000000000000$   
 $\omega_1 = 0,0033333333333333$   
 $\omega_2 = 0,0511111111111111$

$K = \begin{bmatrix} 4,00000000 & -2,00000000 \\ -2,00000000 & 4,00000000 \end{bmatrix}$

$k$	$\bar{\omega}_k$	$\bar{f}(\bar{\omega}_k)$	$\frac{\bar{f}(\bar{\omega}_k)}{\underline{K}\bar{\omega}_k - \bar{f}(\bar{\omega}_k)}$	$\left[ \frac{d\bar{f}}{d\bar{\omega}} \right]^{-1}$	$\left[ \frac{d\bar{f}}{d\bar{\omega}} \right]^{-1} \bar{f}(\bar{\omega}_k)$	$\bar{e}_k = \bar{\omega} - \bar{\omega}_k$	$ \bar{e}_k $
0	0,0050000000000000 0,0050000000000000	$1,859E-02$ $-1,685E-03$	$-8,586E-03$ $1,168E-02$	$2,863E-01$ $9,282E-02$	$-1,373E-03$ $1,449E-03$	$-1,400E-03$ $1,400E-03$	$1,98E-03$
1	0,006373415155247 0,003551052208646	$1,840E-02$ $1,726E-03$	$-1,177E-05$ $-2,681E-04$	$2,844E-01$ $8,652E-02$	$-2,655E-05$ $-4,887E-05$	$-2,658E-05$ $-4,895E-05$	$5,57E-05$
2	0,006399961719597 0,003599922774353	$1,840E-02$ $1,600E-03$	$-3,455E-09$ $-4,297E-07$	$2,845E-01$ $8,680E-02$	$-3,828E-08$ $-7,723E-08$	$-3,828E-08$ $-7,723E-08$	$8,62E-08$
3	0,006399999999906 0,003599999999810	$1,840E-02$ $1,600E-03$	$-7,154E-15$ $-1,058E-12$	$2,845E-01$ $8,680E-02$	$-9,390E-14$ $-1,901E-13$	$-9,390E-14$ $-1,901E-13$	$2,12E-13$
4	0,006400000000000 0,003600000000000	$1,840E-02$ $1,600E-03$	$0,000E+00$ $0,000E+00$	$2,845E-01$ $8,680E-02$	$0,000E+00$ $0,000E+00$	$0,000E+00$ $0,000E+00$	$0,00E+00$

**Solución 11.d** Newton simple

$$\bar{f}(\bar{\omega}) = K\bar{\omega} - \bar{\varphi}(\bar{\omega}) = \bar{0} \quad \rightarrow \quad \bar{\omega}_{k+1} = \bar{\omega}_k - \left( \text{diag} \left[ \frac{d\bar{f}}{d\bar{\omega}} \Big|_{\bar{\omega}=\bar{\omega}_k} \right] \right)^{-1} \bar{f}(\bar{\omega}_k)$$

Luego:

$$\begin{Bmatrix} (\omega_1)_{k+1} \\ (\omega_2)_{k+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (\omega_1)_k \\ (\omega_2)_k \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 + 3\mu_1\sqrt{(\omega_1)_k} & 0 \\ 0 & 4 + 3\mu_2\sqrt{(\omega_2)_k} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -2\theta + 4(\omega_1)_k + 6\mu_1\sqrt{(\omega_1)_k} - 2(\omega_2)_k \\ -2\theta + 4(\omega_2)_k + 6\mu_2\sqrt{(\omega_2)_k} - 2(\omega_1)_k \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} (\omega_1)_{k+1} &= (\omega_1)_k - \frac{-2\theta + 4(\omega_1)_k + 6\mu_1\sqrt{(\omega_1)_k} - 2(\omega_2)_k}{4 + 3\mu_1\sqrt{(\omega_1)_k}} \\ (\omega_2)_{k+1} &= (\omega_2)_k - \frac{-2\theta + 4(\omega_2)_k + 6\mu_2\sqrt{(\omega_2)_k} - 2(\omega_1)_k}{4 + 3\mu_2\sqrt{(\omega_2)_k}} \end{aligned}$$

Resolvemos el mismo caso de antes pero con el método de Newton simple.

**Solución 11.e** Newton simple

Observamos que:

- El método de Newton-Raphson converge cuadráticamente, y halla la solución en 4 iteraciones.
- El método de Newton Simple funciona razonablemente bien, aunque no exhibe convergencia cuadrática. El motivo de que funcione satisfactoriamente se debe a que en este caso

$$\left( \text{diag} \left[ \frac{d\bar{f}}{d\bar{\omega}} \right] \right)^{-1} \approx \left[ \frac{d\bar{f}}{d\bar{\omega}} \right]^{-1}$$

Por lo que las aproximaciones realizadas son adecuadas. En problemas de ingeniería de cálculo no lineal sucede esto con cierta frecuencia, por lo que este método es una alternativa (útil) al método de Newton-Raphson. Precisa más iteraciones para converger, pero su coste computacional es muy inferior ya que no es necesario resolver sistemas de ecuaciones. Este defecto se acentúa en grandes problemas.

- El método de Aproximaciones Sucesivas muestra convergencia lineal muy lenta. Es la habitual. Normalmente cualquier otro método es preferible.

Tabla 32: Ej. 11d: Aplicación del método de Newton simple.

$\theta = 0,0100000000000000$							
$\omega_1 = 0,0033333333333333$		$K =$	4,00000000	-2,00000000			
$\omega_2 = 0,0511111111111111$			-2,00000000	4,00000000			

---

$k$	$\bar{\omega}_k$	$\bar{f}(\bar{\omega}_k)$	$\bar{f}'(\bar{\omega}_k) =$ $K\bar{\omega}_k - \bar{f}(\bar{\omega}_k)$	$diag \left[ \frac{d\bar{f}}{d\bar{\omega}} \right]$	$\left[ diag \left[ \frac{d\bar{f}}{d\bar{\omega}} \right] \bar{f}(\bar{\omega}_k) \right]^{-1}$	$\bar{e}_k = \bar{\omega} - \bar{\omega}_k$	$ \bar{e}_k $
0	0,0050000000000000 0,0050000000000000	1,859E-02 -1,685E-03	-8,586E-03 1,168E-02	4,141E+00 0,000E+00	-2,073E-03 1,894E-03	-1,400E-03 1,400E-03	1,98E-03
1	0,007073149698882 0,003105749822606	1,832E-02 2,910E-03	3,763E-03 -4,633E-03	4,119E+00 0,000E+00	9,136E-04 -6,862E-04	6,731E-04 -4,943E-04	8,35E-04
2	0,006159523097023 0,003791977427135	1,843E-02 1,116E-03	-1,376E-03 1,733E-03	4,127E+00 0,000E+00	-3,334E-04 2,670E-04	-2,405E-04 1,920E-04	3,08E-04
3	0,006492954386071 0,003524936759631	1,839E-02 1,793E-03	5,335E-04 -6,790E-04	4,124E+00 0,000E+00	1,294E-04 -1,032E-04	9,295E-05 -7,506E-05	1,20E-04
4	0,006363587693570 0,003628087219286	1,840E-02 1,528E-03	-2,064E-04 2,568E-04	4,125E+00 0,000E+00	-5,003E-05 3,923E-05	-3,641E-05 2,809E-05	4,60E-05
5	0,006413615288590 0,003588853116780	1,840E-02 1,629E-03	7,846E-05 -1,003E-04	4,125E+00 0,000E+00	1,902E-05 -1,529E-05	1,362E-05 -1,115E-05	1,76E-05
10	0,006399881668051 0,003600090733036	1,840E-02 1,600E-03	-6,696E-07 8,315E-07	4,125E+00 0,000E+00	-1,623E-07 1,268E-07	-1,183E-07 9,073E-08	1,49E-07
15	0,006400000962547 0,003599999210083	1,840E-02 1,600E-03	5,550E-09 -7,103E-09	4,125E+00 0,000E+00	1,346E-09 -1,084E-09	9,625E-10 -7,899E-10	1,25E-09
20	0,006399999991620 0,003600000006425	1,840E-02 1,600E-03	-4,742E-11 5,888E-11	4,125E+00 0,000E+00	-1,150E-11 8,982E-12	-8,380E-12 6,425E-12	1,06E-11
25	0,006400000000068 0,003599999999944	1,840E-02 1,600E-03	3,931E-13 -5,030E-13	4,125E+00 0,000E+00	9,529E-14 -7,673E-14	6,816E-14 -5,594E-14	8,82E-14
30	0,006399999999999 0,003600000000000	1,840E-02 1,600E-03	-3,362E-15 4,174E-15	4,125E+00 0,000E+00	-8,150E-16 6,367E-16	-5,941E-16 4,554E-16	7,49E-16
31	0,006400000000000 0,003600000000000	1,840E-02 1,600E-03	1,277E-15 -1,631E-15	4,125E+00 0,000E+00	3,095E-16 -2,487E-16	2,212E-16 -1,813E-16	2,86E-16