1.– Se sabe que el polinomio $P(x) = x^5 + 5x - 1$ tiene una raíz real α, tal que $0.1 < \alpha < 0.2$. Calcular para que valores de la constante C es convergente el algoritmo iterativo:

$$x^{k+1} = x^k - C\, P(x^k)$$

Cómo se escogerá el valor inicial de la sucesión?

2.– Escribir un algoritmo que permita calcular $x^{1/n}$, n entero no nulo, sin evaluar ninguna raíz.

3.– Dada la ecuación $f(x) = 1 - x^2$, se pide:

a) Qué condiciones debe cumplir la constante m para que el método de Whittaker:

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{m}$$

sea convergente hacia la raíz $x = 1$?

b) Garantiza la condición anterior que el método converge a la raíz $x = 1$ para cualquier valor inicial x^0? Por qué? Dar un ejemplo numérico de convergencia y uno de no convergencia, si se da el caso. (El ejemplo de convergencia no debe ser trivial, en el sentido de que el valor inicial no debe escogerse de forma que el método converja en un número finito de pasos.)

c) Aplicar la aceleración de Aitken al ejemplo convergente desarrollado en el apartado anterior.

d) Si se incumplen las condiciones determinadas en el apartado a), pero se aplica el método de Steffenson, el algoritmo resultante es convergente? Con qué condiciones? Dar un ejemplo numérico de convergencia.

4.– Analizar detalladamente si alguna de las siguientes técnicas iterativas puede ser conveniente para calcular una raíz triple de la ecuación $f(x) = 0$:

a) $x^{k+1} = x^k - f'(x^k)/f''(x^k)$

b) $x^{k+1} = x^k - f''(x^k)/f'''(x^k)$

c) $x^{k+1} = x^k - f'''(x^k)/f^{(4}(x^k)$

5.– Para obtener las raíces simples de la ecuación $f(x)$ se plantea el siguiente método iterativo:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{u(x_i)}{a\,u(x_i) + b} \quad ; \qquad u(x_i) = \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad ,$$

donde a y b son dos constantes reales. Se pide:

a) Hallar las constantes a y b para las que este método es de tercer orden.

b) Plantear el cálculo de la raíz cuadrada del número real positivo s resolviendo la ecuación $x^2 - s = 0$ mediante el método de Newton y mediante este método de tercer orden.

c) Aplicar ambos algoritmos al caso $s = 2$, partiendo de las aproximaciones $x_0 = 1$ y $x_0 = 5$.

d) Cuáles son las conclusiones? Eran previsibles los resultados que se han obtenido?

6.– Sea la ecuación $f(x) = tg(\pi x) - 6$. Considerando $x_0 = 0$ y $x_1 = 0.48$, se desea aproximar la raíz $x = \frac{1}{\pi} \cdot arctg(6) = 0.447431543$ empleando:

a) Método de Bisección
b) Método de *Regula-Falsi*
c) Método Secante

Analizar los resultados obtenidos en cada uno de los casos tras haber realizado diez iteraciones.

7.– Se desea hallar el inverso de un número $b > 0$ cualquiera, sin realizar ninguna operación de división. Sea β $(0.1 < \beta < 1)$ la mantisa del número b en base decimal, y sea e su exponente, esto es

$$b = \beta \cdot 10^e; \qquad 0.1 \leq \beta < 1.$$

Obviamente, la parte correspondiente al exponente puede invertirse fácilmente mediante un cambio de signo. Para invertir la mantisa se propone aplicar el método de Newton para calcular la raíz de la función $f(x) = \beta - (1/x)$. Se pide:

a) Aplicar el método de Newton a la función dada, y simplificar al máximo su expresión de forma que en la fórmula final del algoritmo no se utilice la división.
b) Estudiar gráficamente el comportamiento del método de Newton en este caso, y deducir un valor inicial x_0 que garantice la convergencia del algoritmo.
c) Calcular mediante el algoritmo propuesto el inverso de $b = 0.39000 \cdot 10^{-1}$. Comentar los resultados.

8.– En un problema estructural se requiere resolver el problema del pandeo de una viga biarticulada, con un muelle elástico coaccionando el giro en uno de sus apoyos. Se desea solucionar este problema, para cualesquiera valores de las variables que definen el sistema, a saber, la longitud L de la viga, su rigidez a flexión EI, y la constante elástica K_ϕ del muelle.

Se deduce, mediante el equilibrio de la viga deformada, que la carga que produce la inestabilidad de la geometría recta de la viga, también denominada carga de pandeo P, viene dada por la menor de las soluciones no triviales de la ecuación:

$$\tan(kL) = \frac{kL}{\dfrac{(kL)^2}{k_\phi} + 1}$$

donde $k = \frac{P}{EI}$ y $k_\phi = \frac{K_\phi L}{EI}$. Se pretende resolver esta ecuación mediante un método numérico que funcione para valores arbitrarios de los datos. Para ello se escribe la expresión inicial en la forma equivalente, pero más compacta:

$$\tan(x) = \frac{x}{(cx)^2 + 1},$$

siendo la nueva incógnita $x = kL$, y siendo $c = \sqrt{1/k_\phi}$ un parámetro que se calcula en función de los datos. Obviamente, interesa calcular la menor de las raíces positivas no triviales de la ecuación anterior.

Para ello se propone el siguiente algoritmo numérico: partiendo de un determinado valor inicial convenientemente elegido, se iterará hasta convergencia mediante las fórmulas

$$y^k = g(x^k); \qquad g(x) = \frac{x}{(cx)^2 + 1}$$

$$x^{k+1} = f^{-1}(y^k); \qquad f(x) = \tan(x)$$

siendo f^{-1} la función inversa de f. Se pide:

- **a)** Realizar un estudio analítico de la convergencia asintótica del algoritmo planteado en función del parámetro c.
- **b)** Dibujar aproximadamente las funciones $f(x)$ y $g(x)$, y acotar un intervalo en donde se halle la solución del problema en función del parámetro $c > 0$.
- **c)** Proponer razonadamente un valor inicial que funcione para cualquier valor de c.
- **d)** Iterar hasta convergencia, para los siguientes valores del parámetro c; $c = 0.1$, $c = 0.5$, $c = 1$, $c = 100$, $c = 1000$. Comentar los resultados obtenidos.

9.– La curva de caudales clasificados, empleada en estudios hidrológicos, es la curva que se obtiene al clasificar los caudales medios diarios de un año hidrológico cualquiera en función del número de días del año en que dicho caudal ha sido superado o igualado. Una expresión analítica de esta curva ha sido propuesta por Coutagne. Según este autor, esta curva toma la forma:

$$q(t) = Q_{mc} + \frac{(Q - Q_{mc})(1+\nu)}{T^{\nu}}(T-t)^{\nu},$$

dónde $q(t)$ es el caudal igualado o rebasado durante t días en el curso de un período de observación de T días, Q es el caudal medio anual, Q_{mc} es el caudal mínimo característico (el igualado o superado en todos los días del año excepto en los 10 días más secos), Q_s es el caudal semipermanente (el igualado o superado en la mitad de los días del año), y ν es el coeficiente de irregularidad cuyo valor se define como la mayor de las raíces de la función

$$f(\nu) = 2^{\nu}\kappa - (\nu + 1), \qquad \text{donde} \qquad \kappa = \frac{Q_s - Q_{mc}}{Q - Q_{mc}}.$$

Para calcular el coeficiente de irregularidad se propone la utilización del método de Newton. Se sabe que para los casos que se van estudiar el valor del coeficiente κ adopta valores que no difieren excesivamente de la unidad. Se pide:

- **a)** Dibujar la función $f(\nu)$ y plantear el esquema iterativo propuesto, desarrollando completamente y simplificando al máximo su expresión.
- **b)** Analizar la convergencia del método y explicar para que valores de κ se requerirán más iteraciones, teniendo en cuenta que se quiere obtener el mayor valor posible del coeficiente de irregularidad. Estudiar para qué valores iniciales converge el algoritmo.
- **c)** Aplicar el esquema iterativo desarrollado en los siguientes casos:
  - **1)** $Q_s = 100\ m^3/s$, $Q_{mc} = 1\ m^3/s$, $Q = 98.0000000000\ m^3/s$.
  - **2)** $Q_s = 100\ m^3/s$, $Q_{mc} = 1\ m^3/s$, $Q = 94.2663845753\ m^3/s$.

  En los dos casos se utilizarán los valores iniciales $\nu_0 = 0$ y $\nu_0 = 1$, y se compararán y comentarán los resultados.
- **d)** Proponer otro algoritmo para resolver el último caso del apartado anterior y aplicarlo con los dos valores iniciales propuestos. Comentar los resultados.

10.– Dado el sistema no lineal de n ecuaciones con n incógnitas

$$\underset{\sim}{K}(\bar{x})\bar{x} = \bar{f}(\bar{x}),$$

donde la matriz $\underset{\sim}{K}(\bar{x})$ y el vector $\bar{f}(\bar{x})$ son funciones de las incógnitas $\bar{x}$, se pide:

- **a)** Diseñar y escribir, de forma suficientemente explícita, algoritmos que permitan resolver el sistema anterior por:
  - Aproximaciones Sucesivas,
  - Newton-Raphson,

- Newton,
- Whittaker,

indicando, si se da el caso, qué métodos son los idóneos para resolver los sistemas lineales subyacentes.

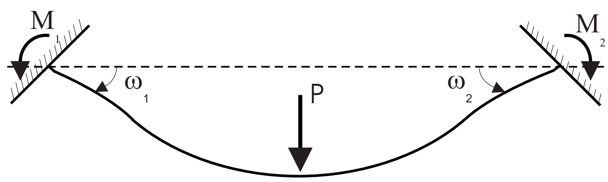
b) Discutir razonadamente, y teniendo en cuenta todos los aspectos relevantes (necesidades de almacenamiento, velocidad de convergencia, etc.), cuáles de los algoritmos diseñados serían preferibles en los casos siguientes:

- La matriz $\underset{\sim}{K}(\bar{x})$ es SIMÉTRICA, DEFINIDA POSITIVA y EN BANDA para todo valor de $\bar{x}$,
- La matriz $\underset{\sim}{K}(\bar{x})$ y el vector $\bar{f}(\bar{x})$ son POCO SENSIBLES respecto a $\bar{x}$ (es decir que para obtener variaciones apreciables en sus componentes es preciso modificar de forma importante el valor de $\bar{x}$).

11.– Una viga de sección constante soporta una carga puntual aplicada en el centro del vano. Los extremos de la viga están empotrados de forma imperfecta. Por ello se produce un giro en cada empotramiento, aunque su valor es lógicamente inferior al que se produciría en una rótula. Se puede suponer que el momento que se opone al giro en cada extremo es proporcional a la raíz cuadrada del ángulo girado. Se definen las constantes positivas θ, μ_1 y μ_2 de forma que

$$\theta = \frac{PL^2}{16EI}, \qquad M_1 = 6\frac{EI}{L}\mu_1\sqrt{\omega_1}, \qquad M_2 = 6\frac{EI}{L}\mu_2\sqrt{\omega_2},$$

donde E es el módulo de elasticidad de la viga, I es el momento de inercia de la sección, L es la longitud del vano, P es la carga puntual aplicada en el centro del vano, M_1 y M_2 son los momentos que ejercen los empotramientos imperfectos sobre la viga, y ω_1 y ω_2, son los giros que se producen en los extremos. El convenio de signos es el representado en la figura adjunta.



Se pide:

a) Demostrar que los giros ω_1 y ω_2 pueden obtenerse resolviendo el sistema no lineal

$$\underset{\sim}{K}\bar{\omega} = \bar{\varphi}(\bar{\omega}), \qquad \text{con} \quad \bar{\omega} = \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{Bmatrix},$$

siendo

$$\underset{\sim}{K} = \begin{bmatrix} +4 & -2 \\ -2 & +4 \end{bmatrix}, \qquad \bar{\varphi}(\omega) = \begin{Bmatrix} 2\theta - 6\mu_1\sqrt{\omega_1} \\ 2\theta - 6\mu_2\sqrt{\omega_2} \end{Bmatrix}.$$

b) Resolver el problema mediante el método de aproximaciones sucesivas

$$\bar{\omega}^{k+1} = \underset{\sim}{K}^{-1}\bar{\varphi}(\bar{\omega}^k)$$

en el caso en que $\mu_1 = 1/300$, $\mu_2 = 23/450$, y $\theta = 10^{-2}$. Se tomarán como aproximaciones iniciales los valores $\omega_1^0 = \omega_2^0 = \theta/2$ (la mitad de los giros que se producirían si los empotramientos no ejerciesen ninguna resistencia al giro).

c) Plantear y resolver el mismo problema mediante el método de Newton-Raphson utilizando la misma aproximación inicial.

d) Plantear y resolver el mismo problema mediante el método de Newton (simple) utilizando la misma aproximación inicial.

e) Comparar los resultados y la eficacia de los tres métodos en este caso.
