1.– Escribir un algoritmo de inversión para matrices triangulares inferiores de orden n y semiancho de banda ℓ. La matriz inicial debe almacenarse en un vector, y su inversa debe almacenarse sobre la matriz inicial.

2.– Escribir un algoritmo de resolución para sistemas lineales de la forma $\underset{\sim}{K}\bar{u} = \bar{f}$, siendo $\underset{\sim}{K}$ una matriz simétrica y definida positiva, de semiancho de banda s, almacenada en un vector. Utilícense el esquema de almacenamiento y el método de solución más adecuados.

3.– Generalizar el algoritmo anterior para la resolución de m sistemas de ecuaciones con la misma matriz y diferentes términos independientes $\{\bar{f}^1, \bar{f}^2, \ldots, \bar{f}^m\}$, hallándose éstos almacenados en un vector.

4.– Para analizar un cierto problema de ingeniería es preciso resolver sistemas de ecuaciones lineales $\underset{\sim}{A}\bar{x} = \bar{b}$, donde la matriz $\underset{\sim}{A}$ es simétrica, definida positiva, y tiene la forma:

$$\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & & & & & SIM. & \\ a_{21} & a_{22} & & & & & \\ a_{31} & 0 & a_{33} & & & & \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} & & & \\ a_{51} & 0 & 0 & 0 & a_{55} & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ a_{n1} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} 1000 \leq n \leq 5000 \\ |a_{ii}| \gg |a_{ij}| \quad \forall j \neq i \end{array}$$

Para resolver el sistema de ecuaciones se quiere utilizar un método directo, almacenando las operaciones intermedias sobre la propia matriz. Se pide:

- **a)** ¿Cuál es el esquema de almacenamiento más económico que se puede usar en estas condiciones? ¿Por qué?
- **b)** ¿Qué método directo conviene utilizar en estas condiciones? ¿Por qué?
- **c)** ¿Podría ser ventajoso, en cuanto a tiempo de cálculo o almacenamiento, utilizar un algoritmo iterativo? ¿Cuál? ¿Por qué?
- **d)** ¿Podría ser ventajoso, en cuanto a tiempo de cálculo o almacenamiento, utilizar un algoritmo semi-iterativo? ¿Cuál? ¿Por qué?
- **e)** Si se renumeran adecuadamente las ecuaciones y/o las incógnitas, ¿es posible reducir el coste computacional y el almacenamiento asociados a la utilización de un método directo? ¿Cómo?

5.– Deducir la condición suficiente para que el algoritmo iterativo:

$$\underset{\sim}{B}^{k+1} = \underset{\sim}{B}^k[2\underset{\sim}{I} - \underset{\sim}{A}\underset{\sim}{B}^k]; \qquad k = 0, \ldots,$$

converja a la inversa de la matriz $\underset{\sim}{A}$, siendo $\underset{\sim}{B}^0$ una aproximación inicial a $\underset{\sim}{A}^{-1}$ tal que:

$$\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{B}^0 = \underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{E}; \qquad (\underset{\sim}{E} = \text{matriz de error})$$

6.– Para resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6 \\ 9 \end{Bmatrix}$$

Se desea utilizar el método de Gauss-Seidel sobrerrelajado. Se pide:

a) Estudiar la convergencia del algoritmo en función del coeficiente de sobrerrelajación α usado ($\alpha =$ constante en todas las iteraciones).

b) ¿Existe algún valor óptimo del coeficiente de sobrerrelajación (constante en todas las iteraciones) para que la convergencia sea más rápida? En caso afirmativo, hallarlo. (Sugerencia: representar gráficamente el radio espectral de la matriz correspondiente en función del coeficiente de sobrerrelajación.)

c) Realizar las cinco primeras iteraciones para $\alpha = 1$ y para $\alpha = \frac{32}{31}$, partiendo de la aproximación inicial $x_1^0 = 0$, $x_2^0 = 0$.

d) En la práctica, ¿podría realizarse un análisis como el anterior para un sistema de varios miles de ecuaciones? ¿Por qué?

7.– Sea una viga continua formada por n vanos. Se numeran los vanos y los apoyos correlativamente, de forma que el vano $e \in \{1, \ldots, n\}$ se extiende desde el apoyo $e - 1$ al apoyo e. Sea E el módulo de elasticidad del material, y sean I_e y L_e el momento de inercia de la sección y la longitud correspondientes al vano e-ésimo, respectivamente. Dados los momentos $\{M_i\}_{i=0,\ldots,n}$ que actúan sobre los apoyos se desea calcular los correspondientes giros $\{w_i\}_{i=0,\ldots,n}$ que se producen. Se pide: Se pide:

a) Plantear el sistema de ecuaciones lineales que es preciso resolver para calcular los giros.

b) Verificar que la matriz de coeficientes del sistema anterior es simétrica y definida positiva.

c) Proponer y desarrollar completamente el método directo que se considere más adecuado para resolver el sistema.

d) Implementar el método seleccionado en un programa FORTRAN que permita resolver este tipo de problemas.

e) Plantear la solución del sistema mediante el método iterativo de Gauss-Seidel. ¿Se puede asegurar que este método convergerá? Interpretar el funcionamiento del método desde el punto de vista estructural.

8.– Sea $\underset{\sim}{A}$ una matriz simétrica y regular de orden n. Se desea encontrar la solución del sistema lineal de ecuaciones:

$$\underset{\sim}{A}\bar{x} = \bar{b}$$

dado $\bar{b}$. Se pide

a) Escribir el algoritmo de Gauss sin pivotamiento **evitando las operaciones inútiles**. Calcular el número de operaciones necesarias para resolver el problema.

b) ¿Puede emplearse el algoritmo de Gauss con pivotamiento conservando la simetría? ¿Por qué?

Sugerencia: Recuérdese que en cada paso del proceso de eliminación, cuando se anulan los términos de la columna k-ésima por debajo del pivote, a_{kk}, sólo se recalcula la submatriz

$$\begin{pmatrix} a_{k+1,k+1} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,k+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$
