MÉTODOS NUMÉRICOS Y PROGRAMACIÓN **Curso 2023–2024**

Almacenamiento y manipulación de matrices **(PRÁCTICA 3)**

1.– Se desea calcular el producto matricial $\underset{\sim}{K} = \underset{\sim}{L}\underset{\sim}{U}$ siendo $\underset{\sim}{L}$ una matriz triangular inferior y $\underset{\sim}{U}$ una matriz triangular superior, ambas de orden n. Se pide:

a) ¿Cuál es la forma de la matriz $\underset{\sim}{K}$?
b) Diseñar los esquemas de almacenamiento mínimos para las tres matrices.
c) Escribir un algoritmo de multiplicación adaptado a los esquemas de almacenamiento anteriores.
d) Describir como crece el coste computacional (medido tanto en términos de la cantidad de memoria como del tiempo de cálculo requerido) en función del orden de las matrices. Compararlo con el que se derivaría de almacenar las matrices completas y utilizar un algoritmo de multiplicación para matrices llenas.

2.– Repetir el problema anterior cuando las matrices $\underset{\sim}{L}$ y $\underset{\sim}{U}$ tienen semianchos de banda l y u respectivamente, siendo $l << n$, y $u << n$.

3.– De la matriz $\underset{\sim}{L}$ se sabe que es triangular inferior y que todos sus elementos son nulos, excepto los situados en la diagonal principal (que son siempre distintos de cero) y los situados en la fila α (que en general serán distintos de cero, aunque no necesariamente), esto es:

$$\underset{\sim}{L} = \begin{bmatrix} l_{11} & & & & & & & \\ & l_{22} & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ l_{\alpha 1} & l_{\alpha 2} & \dots & l_{\alpha\alpha} & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & l_{\beta\beta} & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & l_{nn} \end{bmatrix}.$$

Se desea calcular la matriz producto $\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{L}\underset{\sim}{L}^T$. Se pide:

a) ¿Podemos asegurar que $\underset{\sim}{A}$ es simétrica? ¿Y que es definida positiva? ¿Por qué?
b) ¿Cuál es la forma general de la matriz $\underset{\sim}{A}$?
c) Desarrollar los esquemas de almacenamiento que se consideren más adecuados para las dos matrices. A medida que se va calculando la matriz $\underset{\sim}{A}$, ¿es posible almacenar sus coeficientes en el lugar ocupado por los correspondientes de la matriz $\underset{\sim}{L}$ para ahorrar espacio en memoria? ¿Por qué?
d) Escribir un algoritmo adaptado para realizar el producto matricial con los esquemas de almacenamiento descritos en el apartado anterior.
e) ¿Como crece el tiempo de computación necesario para calcular $\underset{\sim}{A}$ a medida que aumenta el orden de la matriz?

4.– De las matrices $\underset{\sim}{L}$ y $\underset{\sim}{U}$ se sabe que son triangular inferior y triangular superior respectivamente, y que todos sus elementos son nulos excepto los situados en la diagonal principal, en la fila α de $\underset{\sim}{L}$ y en la columna β de $\underset{\sim}{U}$. Esto es:

$$\underset{\sim}{L} = \begin{bmatrix} l_{11} & & & & & & & \\ & l_{22} & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ l_{\alpha 1} & l_{\alpha 2} & \dots & l_{\alpha\alpha} & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & l_{\beta\beta} & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & l_{nn} \end{bmatrix}, \quad \underset{\sim}{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & & & & & u_{1\beta} & & \\ & u_{22} & & & & u_{2\beta} & & \\ & & \ddots & & & \cdot & & \\ & & & u_{\alpha\alpha} & & \cdot & & \\ & & & & \ddots & \cdot & & \\ & & & & & u_{\beta\beta} & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & u_{nn} \end{bmatrix}$$

Se pide:

a) ¿Cuál es la forma general de la matriz producto $\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{L}\underset{\sim}{U}$?

b) Desarrollar los esquemas de almacenamiento que se consideren más adecuados para las tres matrices.

c) Escribir un algoritmo adaptado a los esquemas de almacenamiento descritos en el apartado anterior para realizar el producto matricial.