CONDICIONES DE LIPSCHITZ EN MÉTODOS DE ITERACIÓN FUNCIONAL DE LA FORMA $x_{k+1} = \Phi(x_k)$.

Sea x_k la sucesión de valores calculados mediante el método de iteración funcional:

$$\boxed{x_{k+1} = \Phi(x_k), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots}$$

La convergencia de este esquema iterativo se rige por las denominadas "condiciones de Lipschitz" que pueden formularse de diversa manera, algunas de las cuales se presentan a continuación.

Si no se conoce la existencia de la raíz α *a priori*, entonces puede estudiarse la convergencia del método iterativo mediante las siguientes dos formas de las condiciones de Lipschitz:

A. Forma General: $\Phi(x)$ es una función contractiva

Considérese el intervalo cerrado I definido por los valores conocidos $x_0 \in \mathbb{R}$ y $\rho \in \mathbb{R}^+$ ($I \equiv [x_0 - \rho, x_0 + \rho]$) y sea $\lambda \in \mathbb{R}$ ($0 \leq \lambda < 1$).

$$\text{Si } \left\{ \begin{array}{c} |\Phi(x) - \Phi(z)| \leq \lambda |x - z|, \quad \forall x, z \in I; \\ \\ |x_0 - \Phi(x_0)| \leq (1 - \lambda)\rho; \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_k \in I, \quad \forall k; \\ \\ \exists \lim\limits_{k\to\infty} x_k = \alpha; \\ \exists^* \alpha \in I / \Phi(\alpha) = \alpha; \\ \\ |x_{k+1} - \alpha| \leq \lambda |x_k - \alpha|, \quad \forall k; \end{array} \right\}$$

B. Forma más restrictiva: $\Phi(x)$ es una función derivable

Considérese el intervalo cerrado I definido por los valores conocidos $x_0 \in \mathbb{R}$ y $\rho \in \mathbb{R}^+$ ($I \equiv [x_0 - \rho, x_0 + \rho]$) y sea $\lambda \in \mathbb{R}$ ($0 \leq \lambda < 1$).

$$\text{Si } \left\{ \begin{array}{c} |\Phi'(x)| \leq \lambda, \quad \forall x \in I; \\ \\ |x_0 - \Phi(x_0)| \leq (1 - \lambda)\rho; \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_k \in I, \quad \forall k; \\ \\ \exists \lim\limits_{k\to\infty} x_k = \alpha; \\ \exists^* \alpha \in I / \Phi(\alpha) = \alpha; \\ \\ |x_{k+1} - \alpha| \leq \lambda |x_k - \alpha|, \quad \forall k; \end{array} \right\}$$

Esta forma es más restrictiva que la dada en **A**, aunque generalmente es más fácil de verificar.

Si se conoce *a priori* la existencia de la raíz α, entonces puede estudiarse la convergencia del método iterativo mediante una de las siguientes formas de las condiciones de Lipschitz:

C. Forma General: $\Phi(x)$ es una función contractiva

Considérese el intervalo cerrado I definido por $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\rho \in \mathbb{R}^+$ ($I \equiv [\alpha-\rho, \alpha+\rho]$) y sea $\lambda \in \mathbb{R}$ ($0 \leq \lambda < 1$).

$$\text{Si} \left\{ \begin{array}{c} \exists\ \alpha \ / \ \alpha = \Phi(\alpha) \\ \\ |\Phi(x) - \Phi(z)| \leq \lambda |x-z|, \quad \forall x, z \in I; \\ \\ x_0 \in I; \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_k \in I, \quad \forall k; \\ \\ \exists \lim\limits_{k\to\infty} x_k = \alpha; \\ \\ \exists^* \alpha; \\ \\ |x_{k+1} - \alpha| \leq \lambda |x_k - \alpha|, \quad \forall k; \end{array} \right\}$$

D. Forma General: $\Phi(x)$ es una función contractiva

Considérese el intervalo cerrado I definido por $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\rho \in \mathbb{R}^+$ ($I \equiv [\alpha-\rho, \alpha+\rho]$) y sea $\lambda \in \mathbb{R}$ ($0 \leq \lambda < 1$).

$$\text{Si} \left\{ \begin{array}{c} \exists\ \alpha \ / \ \alpha = \Phi(\alpha) \\ \\ |\Phi(x) - \Phi(\alpha)| \leq \lambda |x-\alpha|, \quad \forall x \in I; \\ \\ x_0 \in I; \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_k \in I, \quad \forall k; \\ \\ \exists \lim\limits_{k\to\infty} x_k = \alpha; \\ \\ \exists^* \alpha; \\ \\ |x_{k+1} - \alpha| \leq \lambda |x_k - \alpha|, \quad \forall k; \end{array} \right\}$$

E. Forma más restrictiva: $\Phi(x)$ es una función derivable

Considérese el intervalo cerrado I definido por $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\rho \in \mathbb{R}^+$ ($I \equiv [\alpha-\rho, \alpha+\rho]$) y sea $\lambda \in \mathbb{R}$ ($0 \leq \lambda < 1$).

$$\text{Si} \left\{ \begin{array}{c} \exists\ \alpha \ / \ \alpha = \Phi(\alpha) \\ \\ |\Phi'(x)| \leq \lambda, \quad \forall x \in I; \\ \\ x_0 \in I; \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_k \in I, \quad \forall k; \\ \\ \exists \lim\limits_{k\to\infty} x_k = \alpha; \\ \\ \exists^* \alpha; \\ \\ |x_{k+1} - \alpha| \leq \lambda |x_k - \alpha|, \quad \forall k; \end{array} \right\}$$

Esta forma es más restrictiva que las dadas en **C** y **D**, aunque generalmente es más fácil de verificar.