MÉTODOS NUMÉRICOS Y PROGRAMACIÓN

Operaciones con polinomios

1. Evaluación de polinomios (mediante la Regla de Horner)

Dado un polinomio de orden n

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j\, x^j = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \ldots + a_n\, x^n$$

Esta forma de calcular repite muchas operaciones y para valores de n elevados el orden de la suma puede alterar el resultado. Por este motivo la evaluación de polinomios se realiza normalmente mediante la Regla de Horner. Si se desea evaluar el polinomio $P_n(x)$ en un determinado punto $\bar{x}$ se calculará como:

$$P_n(\bar{x}) = a_0 + \bar{x}\Big(a_1 + \bar{x}\Big(a_2 + \ldots + \bar{x}(a_{n-1} + \bar{x}\, a_n)\Big)\Big)$$

En cada paréntesis hay un producto y una suma. Y hay $n-1$ paréntesis, a los que hay que añadir un producto y una suma correspondientes al término a_0. De modo que se trata de un algoritmo directo de tipo lineal ($T(n)$).

En la práctica el algoritmo se implementaría como:

```
p = a(n)
do i = n-1, 0, -1
  p = a(i) + xbarra * p
enddo
```

2. Derivación de polinomios (mediante división sintética)

Buscamos una forma eficiente y automática de calcular las derivadas de un polinomio en un punto $\bar{x}$.

Para ello se calculan sucesivas divisiones del polinomio entre el monomio $(x - \bar{x})$, lo que en realidad supone realizar un cambio de base de polinomios en el se cambia la base canónica de polinomios por la base formada por las sucerivas potencias del monomio $(x - \bar{x})$.

De este modo el mismo polinomio $P_n(x)$ se puede reescribir en términos de la nueva base como:

$$
\begin{array}{lcl}
P_n(x) & = & \underbrace{q_{n-1}(x)}\,(x-\bar{x})+R_0 \qquad \longleftarrow \qquad \begin{array}{l|l} P_n(x) & (x-\bar{x}) \\ \cline{2-2} R_0 & q_{n-1}(x) \end{array} \\
 & \swarrow & \\
q_{n-1}(x) & = & \underbrace{q_{n-2}(x)}\,(x-\bar{x})+R_1 \\
 & \swarrow & \\
q_{n-2}(x) & = & \underbrace{q_{n-3}(x)}\,(x-\bar{x})+R_2 \\
 & \vdots & \\
q_2(x) & = & \underbrace{q_1(x)}\,(x-\bar{x})+R_{n-2} \\
 & \swarrow & \\
q_1(x) & = & \underbrace{q_0(x)}\,(x-\bar{x})+R_{n-1} \\
 & \swarrow & \\
q_0(x) & = & R_n
\end{array}
$$

De modo que:

$$
P_n(x) = R_0 + (x-\bar{x}) \underbrace{\Big(R_1 + (x-\bar{x}) \underbrace{\Big(R_2 + (x-\bar{x})(\ldots + R_{n-1} + (x-\bar{x})R_n) \Big)}_{q_{n-2}(x)} \Big)}_{q_{n-1(x)}}
$$

Y desarrollando ahora todos los términos se puede escribir el polinomio como:

$$
P_n(x) = R_0 + (x-\bar{x})R_1 + (x-\bar{x})^2 R_2 + +(x-\bar{x})^3 R_3 + \ldots + (x-\bar{x})^n R_n
$$

De modo que las derivadas de este polinomio se pueden calcular ahora como:

$$
\begin{array}{lclllll}
P'_n(x) & = & R_1 + & 2\,(x-\bar{x})R_2 & +3\,(x-\bar{x})^2 R_3 & + \ldots + n & (x-\bar{x})^{n-1}R_n \\
P''_n(x) & = & & 2 \qquad\quad R_2 & +6\,(x-\bar{x})\ R_3 & + \ldots + n(n-1) & (x-\bar{x})^{n-2}R_n \\
P_n^{(3}(x) & = & & & 6\,R_3 & + \ldots + n(n-1)(n-2) & (x-\bar{x})^{n-3}R_n \\
\vdots & & & & & & \\
P_n^{(n}(x) & = & & & & & n!\,R_n
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcl}
P'_n(x) & = & 1\,R_1 + 2\,(x-\bar{x})R_2 + 3\,(x-\bar{x})^2 R_3 + \ldots + n\,(x-\bar{x})^{n-1}R_n \\
P''_n(x) & = & 2\,R_2 + 6\,(x-\bar{x})R_3 + \ldots + n(n-1)\,(x-\bar{x})^{n-2}R_n \\
P_n^{(3}(x) & = & 6\,R_3 + \ldots + n(n-1)(n-2)\,(x-\bar{x})^{n-3}R_n \\
 & \vdots & \\
P_n^{(n}(x) & = & n!\,R_n
\end{array}
$$

De modo que si se evalúan las derivadas en el punto $\bar{x}$ se cancelan la mayoría de los términos y se obtiene que:

$$
\left.
\begin{array}{lcl}
P_n(\bar{x}) & = & R_0 \\
P'_n(\bar{x}) & = & R_1 \\
P''_n(\bar{x}) & = & 2\,R_2 \\
P_n^{(3}(\bar{x}) & = & 6\,R_3 \\
 & \vdots & \\
P_n^{(n}(\bar{x}) & = & n!\,R_n
\end{array}
\right\}
\qquad
\boxed{P_n^{(i}(\bar{x}) = i!\,R_i, \qquad i = 0, \ldots, n}
$$

En este caso si se desean calcular todas las derivadas del polinomio el coste es cuadrático ($T(n^2)$).