Condiciones de convergencia en un intervalo (Condiciones de Lipschitz)

1. **Función Lipschitziana o contractiva.**
   Una función $\phi(x)$ es contractiva en un intervalo cerrado I si y sólo si

$$\left\{ \exists\lambda \in [0,1) \;/\; |\phi(x) - \phi(\xi)| \leq \lambda|x-\xi| \quad \forall x, \xi \in I \right\}$$

   siendo λ la constante de Lipschitz.

2. **Convergencia en un intervalo.**
   Dada ϕ, Lipschitziana en $I = [x_0 - \rho, x_0 + \rho]$, con constante de Lipschitz λ y dada una aproximación inicial x_0 tal que $|x_0 - \phi(x_0)| \leq (1-\lambda)\rho$:

$$\left\{ \begin{array}{c} \phi \;/\; |\phi(x) - \phi(\xi)| \leq \lambda|x-\xi| \quad \forall x, \xi \in I \equiv [x_0 - \rho, x_0 + \rho] \\ \text{con } \rho > 0;\; \lambda \in [0,1) \text{ y} \\ x_0 \;/\; |x_0 - \phi(x_0)| \leq (1-\lambda)\rho \end{array} \right\}$$

   Entonces:

   a) $\boxed{x_{k+1} = \phi(x_k) \;\in\; I \quad \Longrightarrow \quad |x_{k+1} - x_0| \;\leq\; \rho}$

   Demostración por inducción.

   Primero demostramos que $x_1 \in I$

$$\begin{array}{rcl} x_1 = \phi(x_0) & \rightsquigarrow & |x_0 - \phi(x_0)| \;\leq\; (1-\lambda)\rho \;\Leftrightarrow \\ & & |x_1 - x_0| \;\leq\; (1-\lambda)\rho \;\leq\; \rho \;\Leftrightarrow\; x_1 \;\in\; I \end{array}$$

   Luego suponemos que se cumple para x_k y lo demostramos para x_{k+1}:

$$\begin{array}{lcll} |x_{k+1} - x_k| & = & |\phi(x_k) - \phi(x_{k-1})| & \leq \;\lambda\; |x_k - x_{k-1}| \\ |x_k - x_{k-1}| & = & |\phi(x_{k-1}) - \phi(x_{k-2})| & \leq \;\lambda\; |x_{k-1} - x_{k-2}| \\ & \vdots & & \\ |x_2 - x_1| & = & |\phi(x_1) - \phi(x_0)| & \leq \;\lambda\; |x_1 - x_0| \end{array}$$

   De modo que:

$$|x_{k+1} - x_k| \;\leq\; \lambda^k \;|x_1 - x_0| \;\leq\; \lambda^k \;(1-\lambda)\rho \;\leq\; \rho$$

   Queremos acotar $|x_{k+1} - x_0|$, de modo que:

$$\begin{array}{rcl} |x_{k+1} - x_0| & = & |(x_{k+1} - x_k) \;+\; (x_k - x_{k-1}) \;+\; \ldots \;+\; (x_1 - x_0)| \\ & \leq & \underbrace{|x_{k+1} - x_k|}_{\leq \lambda^k (1-\lambda)\rho} \;+\; \underbrace{|x_k - x_{k-1}|}_{\leq \lambda^{k-1} (1-\lambda)\rho} \;+\; \ldots \;+\; \underbrace{|x_1 - x_0|}_{\leq \lambda\; (1-\lambda)\rho} \\ & \leq & \underbrace{(\lambda^k + \lambda^{k-1} + \ldots + \lambda^0)}_{\left(\frac{1-\lambda^{k+1}}{1-\lambda}\right)}(1-\lambda)\rho \end{array}$$

Lo que conduce a:

$$|x_{k+1} - x_0| \;\leq\; \left(1 - \lambda^{k+1}\right) \rho \;\leq\; \rho$$

b) $\boxed{\lim_{k \to \infty} x_k \;=\; \alpha}$ (Demostramos que es una sucesión de Cauchy)

$$\begin{aligned}
|x_m - x_{m+p}| &= |(x_m - x_{m+1}) + (x_{m+1} - x_{m+2}) + \ldots + (x_{m+p-1} - x_{m+p})| \\
&\leq \underbrace{|x_m - x_{m+1}|}_{\leq\, \lambda^m (1-\lambda)\rho} + \underbrace{|x_{m+1} - x_{m+2}|}_{\leq\, \lambda^{m+1} (1-\lambda)\rho} + \ldots + \underbrace{|x_{m+p-1} - x_{m+p}|}_{\leq\, \lambda^{m+p-1}\, (1-\lambda)\rho} \\
&\leq (1-\lambda)\; \rho\; \lambda^m (\underbrace{1 + \lambda + \ldots + \lambda^{p-1}}_{\frac{1-\lambda^p}{1-\lambda}}) = (1 - \lambda^p)\; \rho\; \lambda^m
\end{aligned}$$

Esto implica que:

$$\forall\, \varepsilon \;>\; 0,\; \exists\, N(\varepsilon) \;/\; |x_m - x_{m+p}| \;<\; \varepsilon, \quad \forall m > N(\varepsilon)$$

Si definimos $N \;/\; \lambda^N < \varepsilon/\rho$ entonces:

$$|x_m - x_{m+p}| \leq (1 - \lambda^p)\; \rho\; \frac{\varepsilon}{\rho} \;\leq\; \varepsilon$$

Y por tanto se trata de una sucesión de Cauchy convergente.

c) $\boxed{\alpha \text{ es la única raíz de } f \text{ en } I}$

Por reducción al absurdo suponemos que existe otra raíz β, entonces:

$$\beta \in I \equiv [x_0 - \rho,\; x_0 + \rho];\;\; \beta = \phi(\beta)$$

De modo que:

$$|\alpha - \beta| \;=\; |\phi(\alpha) - \phi(\beta)| \;\leq\; \lambda|\alpha - \beta|$$

Entonces:

$$|\alpha - \beta| \;\leq\; \lambda|\alpha - \beta| \quad \text{con} \quad \lambda \in [0, 1)$$

Lo cual sólo es posible si $\alpha = \beta$ y entonces la raíz sería única.

d) $\boxed{\text{La convergencia es al menos lineal}}$

$$|x_{k+1} - \alpha| \;=\; |\phi(x_k) - \phi(\alpha)| \;\leq\; \lambda\; |x_k - \alpha|$$

De modo que:

$$|x_{k+1} - \alpha| \;\leq\; \lambda\; |x_k - \alpha| \quad \text{con} \quad \lambda \in [0, 1)$$

De modo que se comprueba que la convergencia es lineal.

3. **Convergencia en un intervalo considerando propagación de errores de redondeo**

Dado el algoritmo de iteración funcional:

$$x_{k+1} \;=\; \phi(x_k)$$

Realmente podemos calcular:

$$\widehat{x}_{k+1} \;=\; \phi(\widehat{x}_k) \;+\; \varepsilon_k$$

Definimos ε tal que $\max|\varepsilon_k| \;\leq\; \varepsilon$

Para que el algoritmo converja:

$$\lim_{k\to\infty} \widehat{x}_k \;=\; \alpha$$

Dado α tal que $\alpha = \phi(\alpha)$, con $\rho > 0$ en un intervalo $I = [\alpha - \rho, \alpha + \rho]$. Si $\phi(x)$ es Lipschitziana en I con constante $\lambda \in [0, 1)$ y además $\widehat{x}_0 \in [\alpha - \rho_0, \alpha + \rho_0]$ con $\rho_0 \in (0, \rho - \frac{\varepsilon}{1-\lambda})$.

Se adopta este rango de validez de ρ_0 para que $\widehat{x}_1 \in I$. Así:

$$|\alpha - \widehat{x}_1| = |\alpha - (\phi(x_0) + \varepsilon_0)| \leq |\alpha - \phi(x_0)| + |\varepsilon_0| \leq (1-\lambda)\rho_0 + |\varepsilon_0| \leq (1-\lambda)\rho_0 + \varepsilon$$

$$|\alpha - \widehat{x}_1| \leq (1-\lambda)\rho_0 + \varepsilon < (1-\lambda)\rho$$

Luego,

$$\rho_0 < \rho - \frac{\varepsilon}{1-\lambda}$$

Entonces se puede demostrar que:

1. $\widehat{x}_k \in I \;\forall k$
2. $|\widehat{x}_k - \alpha| \;\leq\; \dfrac{\varepsilon}{1-\lambda} + \lambda^k \left(\rho_0 - \dfrac{\varepsilon}{1-\lambda}\right)$

Y en el límite:

$$k \to \infty \implies \widehat{x}_k \in \left[\alpha - \frac{\varepsilon}{1-\lambda},\; \alpha + \frac{\varepsilon}{1-\lambda}\right]$$

Por tanto podemos acercarnos a la solución pero dentro de los límites de precisión de la máquina.

Es más cuanto más lento sea un algoritmo ($\lambda \to 1$) mayor será esta cota de error. Los algoritmos más lentos son además más imprecisos.

Demostración:

Partimos de que $\widehat{x}_0 \in [\alpha - \rho_0, \alpha + \rho_0]$

$|\widehat{x}_k - \alpha| = |\phi(\widehat{x}_{k-1}) + \varepsilon_{k-1} - \phi(\alpha)| \leq |\phi(\widehat{x}_{k-1}) - \phi(\alpha)| + |\varepsilon_{k-1}| \leq \lambda|\widehat{x}_{k-1} - \alpha| + \varepsilon$

$|\widehat{x}_1 - \alpha| \leq \lambda|\widehat{x}_0 - \alpha| + \varepsilon$

$|\widehat{x}_2 - \alpha| \leq \lambda^2|\widehat{x}_0 - \alpha| + \lambda\varepsilon + \varepsilon$

$\vdots$

$|\widehat{x}_k - \alpha| \leq \lambda^k |\widehat{x}_0 - \alpha| + \lambda^{k-1}\varepsilon + \ldots + \lambda\varepsilon + \varepsilon$

$|\widehat{x}_k - \alpha| \leq \lambda^k |\widehat{x}_0 - \alpha| + \varepsilon(\lambda^{k-1} + \ldots + \lambda + 1)$

$|\widehat{x}_k - \alpha| \leq \lambda^k |\widehat{x}_0 - \alpha| + \varepsilon \dfrac{1-\lambda^k}{1-\lambda}$

$|\widehat{x}_k - \alpha| \leq \lambda^k \rho_0 + \varepsilon \ \dfrac{1-\lambda^k}{1-\lambda}$

$|\widehat{x}_k - \alpha| \leq \lambda^k \left(\rho_0 - \dfrac{\varepsilon}{1-\lambda}\right) + \dfrac{\varepsilon}{1-\lambda} \leq \rho_0 + \dfrac{\varepsilon}{1-\lambda} = \rho \quad \forall k$

Luego $|\widehat{x}_k - \alpha| \leq \rho$ y $\widehat{x}_k \in I \ \forall k$

En el límite:

$\lim\limits_{k\to\infty} |\widehat{x}_k - \alpha| \leq \ \dfrac{\varepsilon}{1-\lambda} \quad \Longrightarrow \quad \alpha - \dfrac{\varepsilon}{1-\lambda} \ \leq \ \lim\limits_{k\to\infty} \widehat{x}_k \ \leq \ \alpha + \dfrac{\varepsilon}{1-\lambda}$

Luego el algoritmo iterativo converge hacia la solución α pero con una cota superior del error no nula.