1.– Demostrar, utilizando coordenadas cartesianas ortonormales, las siguientes expresiones:

a) $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(f)\right) = \vec{0}$.

b) $\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{f}\right)\right) = 0$.

c) $\Delta f = \mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(f)\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

SOLUCIÓN:

Sean el campo escalar $f(x,y,z)$ y el campo vectorial $\vec{f}(x,y,z)$, donde

$$\vec{f}(x,y,z) = \underset{\sim}{E}\,\bar{f}(x,y,z), \qquad \text{con} \quad \underset{\sim}{E} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{bmatrix}, \quad \bar{f}(x,y,z) = \begin{Bmatrix} f_x(x,y,z) \\ f_y(x,y,z) \\ f_z(x,y,z) \end{Bmatrix}.$$

Por definición,

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) = \underset{\sim}{E}\,\overline{\mathrm{grad}}(f), \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{f}\right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix} = \underset{\sim}{E}\,\overline{\mathrm{rot}}(\vec{f}),$$

$$\overline{\mathrm{grad}}(f) = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{Bmatrix}, \qquad \mathrm{div}\left(\vec{f}\right) = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}, \qquad \overline{\mathrm{rot}}(\vec{f}) = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial f_z}{\partial y} - \dfrac{\partial f_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f_x}{\partial z} - \dfrac{\partial f_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f_y}{\partial x} - \dfrac{\partial f_x}{\partial y} \end{Bmatrix}.$$

a) $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(f)\right) = \vec{0}$.

Sustituyendo $\vec{\eta} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)$ en la expresión del rotacional,

$$\bar{\eta} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overline{\mathrm{rot}}\,(\vec{\eta}\,) = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right) - \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) - \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) \end{Bmatrix} = \bar{0}.$$

b) $\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{f}\right)\right) = 0$.

Sustituyendo $\vec{\omega} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{f}\right)$ en la expresión de la divergencia,

$$\bar{\omega} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial f_z}{\partial y} - \dfrac{\partial f_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f_x}{\partial z} - \dfrac{\partial f_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f_y}{\partial x} - \dfrac{\partial f_x}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{div}\,(\vec{\omega}\,) = \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z},$$

luego

$$\operatorname{div}\left(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(\vec{f}\right)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f_z}{\partial y}-\frac{\partial f_y}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f_x}{\partial z}-\frac{\partial f_z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f_y}{\partial x}-\frac{\partial f_x}{\partial y}\right) = 0.$$

c) $\Delta f = \operatorname{div}\left(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,(f)\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$

Sustituyendo $\vec{\eta} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}(f)$ en la expresión de la divergencia,

$$\bar{\eta} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \Delta f = \operatorname{div}\left(\vec{\eta}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

2.– Demostrar, utilizando coordenadas curvilíneas generales, las siguientes expresiones:

a) $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,(f)\right) = \vec{0}.$

b) $\operatorname{div}\left(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(\vec{f}\right)\right) = 0.$

c) $\Delta f = \operatorname{div}\left(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,(f)\right) = \dfrac{1}{\sqrt{g}}\,\dfrac{\partial}{\partial u^i}\left(\sqrt{g}\;g^{ij}\,\dfrac{\partial f}{\partial u^j}\right).$

Comprobar que la expresión general del Laplaciano se reduce a la del ejercicio anterior cuando las coordenadas son cartesianas ortonormales.

SOLUCIÓN:

Sean el campo escalar $f(\bar{u})$ y el campo vectorial $\vec{f}(\bar{u})$, donde

$$\vec{f}(\bar{u}) = \underset{\sim}{H}\;\bar{f}(\bar{u}), \qquad \text{con} \quad \underset{\sim}{H} = \begin{bmatrix}\vec{h}_1 & \cdots & \vec{h}_\nu\end{bmatrix}, \quad \bar{f}(\bar{u}) = \begin{Bmatrix} f^1(\bar{u}) \\ \vdots \\ f^\nu(\bar{u}) \end{Bmatrix}, \quad \bar{u} = \begin{Bmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^\nu \end{Bmatrix}.$$

En los casos en los que intervenga el vector rotacional, la dimensión ν será forzosamente igual a 3.
Por definición,

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}}(f) = \widetilde{H}\;\underline{\operatorname{grad}}(f), \qquad \overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(\vec{f}\right) = \pm\frac{1}{\sqrt{g}}\begin{vmatrix} \vec{h}_1 & \vec{h}_2 & \vec{h}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial u^1} & \dfrac{\partial}{\partial u^2} & \dfrac{\partial}{\partial u^3} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = \underset{\sim}{H}\;\overline{\operatorname{rot}}(\vec{f}),$$

$$\underline{\operatorname{grad}}(f) = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u^1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial u^\nu} \end{Bmatrix}, \quad \operatorname{div}\left(\vec{f}\right) = \frac{1}{\sqrt{g}}\,\frac{\partial}{\partial u^i}\left(\sqrt{g}\,f^i\right), \quad \overline{\operatorname{rot}}(\vec{f}) = \pm\frac{1}{\sqrt{g}}\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial f_3}{\partial u^2} - \dfrac{\partial f_2}{\partial u^3} \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial u^3} - \dfrac{\partial f_3}{\partial u^1} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial u^1} - \dfrac{\partial f_1}{\partial u^2} \end{Bmatrix}.$$

Nótese que al calcular el gradiente de un campo escalar mediante las expresiones anteriores se obtienen las componentes COVARIANTES del gradiente.

Nótese también que al calcular el rotacional de un campo vectorial mediante las expresiones anteriores se obtienen las componentes CONTRAVARIANTES del rotacional a partir de las componentes COVARIANTES del campo. Por ello, el cálculo del rotacional del gradiente puede realizarse directamente, combinando ambas expresiones.

Sin embargo, el cálculo de la divergencia de un campo vectorial se plantea a partir de las componentes CONTRAVARIANTES del campo. Por ello, el cálculo de la divergencia del gradiente no puede realizarse directamente y es preciso obtener las componentes CONTRAVARIANTES del gradiente antes de combinar ambas expresiones.

a) $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(f)\right) = \vec{0}$.

Sustituyendo $\vec{\eta} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)$ en la expresión del rotacional,

$$\underline{\eta} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u^1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial u^2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial u^3} \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overline{\mathrm{rot}}\,(\vec{\eta}\,) = \pm\frac{1}{\sqrt{g}} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial u^2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial u^3}\right) - \dfrac{\partial}{\partial u^3}\left(\dfrac{\partial f}{\partial u^2}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial u^3}\left(\dfrac{\partial f}{\partial u^1}\right) - \dfrac{\partial}{\partial u^1}\left(\dfrac{\partial f}{\partial u^3}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial u^1}\left(\dfrac{\partial f}{\partial u^2}\right) - \dfrac{\partial}{\partial u^2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial u^1}\right) \end{Bmatrix} = \bar{0}.$$

b) $\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{f}\,\right)\right) = 0$.

Sustituyendo $\vec{\omega} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{f}\,\right)$ en la expresión de la divergencia,

$$\bar{\omega} = \pm\frac{1}{\sqrt{g}} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial f_3}{\partial u^2} - \dfrac{\partial f_2}{\partial u^3} \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial u^3} - \dfrac{\partial f_3}{\partial u^1} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial u^1} - \dfrac{\partial f_1}{\partial u^2} \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{div}\,(\vec{\omega}\,) = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial}{\partial u^1}\,(\sqrt{g}\,\omega^1) + \frac{\partial}{\partial u^2}\,(\sqrt{g}\,\omega^2) + \frac{\partial}{\partial u^3}\,(\sqrt{g}\,\omega^3)\right),$$

luego,

$$\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{f}\,\right)\right) = \pm\frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial}{\partial u^1}\left(\frac{\partial f_3}{\partial u^2} - \frac{\partial f_2}{\partial u^3}\right) + \frac{\partial}{\partial u^2}\left(\frac{\partial f_1}{\partial u^3} - \frac{\partial f_3}{\partial u^1}\right) + \frac{\partial}{\partial u^3}\left(\frac{\partial f_2}{\partial u^1} - \frac{\partial f_1}{\partial u^2}\right)\right) = 0.$$

c) $\Delta f = \mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(f)\right) = \dfrac{1}{\sqrt{g}}\,\dfrac{\partial}{\partial u^i}\left(\sqrt{g}\;g^{ij}\,\dfrac{\partial f}{\partial u^j}\right)$.

Sustituyendo $\vec{\eta} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)$ en la expresión de la divergencia,

$$\eta_j = \frac{\partial f}{\partial u^j} \quad \Rightarrow \quad \eta^i = g^{ij}\,\eta_j \quad \Rightarrow \quad \Delta f = \mathrm{div}\,(\vec{\eta}\,) = \frac{1}{\sqrt{g}}\,\frac{\partial}{\partial u^i}\left(\sqrt{g}\;g^{ij}\,\frac{\partial f}{\partial u^j}\right).$$

Si las coordenadas curvilíneas son ortonormales, las componentes del tensor métrico forman una matriz idéntica, ya que $g_{ij} = \vec{h}_i \cdot \vec{h}_j = \delta_{ij}$. Por tanto, su determinante valdrá $g = 1$ y las componentes de la matriz inversa también formarán una matriz idéntica, con $g^{ij} = \delta^{ij}$.
En consecuencia, si las coordenadas curvilíneas son ortonormales la expresión anterior de la divergencia se reduce a

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{1}}\,\frac{\partial}{\partial u^i}\left(\sqrt{1}\;\delta^{ij}\,\frac{\partial f}{\partial u^j}\right) = \frac{\partial}{\partial u^i}\left(\frac{\partial f}{\partial u^i}\right).$$

En el caso particular en el que las coordenadas curvilíneas sean precisamente las cartesianas ortonormales en un espacio de dimensión $\nu = 3$, se cumplirá que

$$x = u^1,\ y = u^2,\ z = u^3 \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

3.– Sea el campo vectorial $\vec{f}(\bar{r}) = r^a\,\vec{r}$, donde $r = |\vec{r}|$, $\vec{r}$ es el vector de posición y $a \in \mathbb{R}$ es una constante. Se pide:

a) Calcular los valores de a que hacen que el campo vectorial sea solenoidal.
b) Calcular los valores de a que hacen que el campo vectorial sea irrotacional.

SOLUCIÓN:

$$\bar{r} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}, \qquad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \qquad \bar{f} = \begin{Bmatrix} r^a\,x \\ r^a\,y \\ r^a\,z \end{Bmatrix}.$$

a) Calcular los valores de a que hacen que el campo vectorial sea solenoidal.

El campo $\vec{f}$ es SOLENOIDAL $\Leftrightarrow$ $\operatorname{div}\left(\vec{f}\right) = 0$.

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\left(\vec{f}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}(r^a\,x) + \frac{\partial}{\partial y}(r^a\,y) + \frac{\partial}{\partial z}(r^a\,z) \\ &= \left(a\,r^{a-1}\frac{\partial r}{\partial x}\,x + r^a\right) + \left(a\,r^{a-1}\frac{\partial r}{\partial y}\,y + r^a\right) + \left(a\,r^{a-1}\frac{\partial r}{\partial z}\,z + r^a\right),\end{aligned}$$

donde

$$r^2 = x^2+y^2+z^2 \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} 2\,r\,\dfrac{\partial r}{\partial x} = 2\,x \\ 2\,r\,\dfrac{\partial r}{\partial y} = 2\,y \\ 2\,r\,\dfrac{\partial r}{\partial z} = 2\,z \end{Bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{x}{r} \\ \dfrac{\partial r}{\partial y} = \dfrac{y}{r} \\ \dfrac{\partial r}{\partial z} = \dfrac{z}{r} \end{Bmatrix}.$$

Por tanto,

$$\operatorname{div}\left(\vec{f}\right) = \frac{a\,r^{a-1}}{r}\left(x^2+y^2+z^2\right) + 3\,r^a = r^a(a+3),$$

y finalmente,

$$\boxed{\operatorname{div}\left(\vec{f}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = -3.}$$

Nota: El campo en cuestión, $\vec{f} = r^{-3}\,\bar{r}$, es de tipo Newtoniano. Es relativamente fácil probar que los únicos campos de fuerzas CENTRALES que también son SOLENOIDALES son precisamente los campos de tipo NEWTONIANO, para los que $\vec{f} = k\,r^{-3}\,\bar{r}$ (donde la constante k es positiva cuando la fuerza es de repulsión y negativa cuando la fuerza es de atracción, como es el caso del campo gravitatorio). Para demostrarlo basta con considerar un campo central genérico

$$\vec{f} = f(r)\,\frac{\vec{r}}{r},$$

y obligar a que su divergencia sea idénticamente nula. Se sugiere a los estudiantes que intenten realizar esta demostración.

b) Calcular los valores de a que hacen que el campo vectorial sea irrotacional.

El campo $\vec{f}$ es IRROTACIONAL $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(\vec{f}\right) = \vec{0}$.

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(\vec{f}\right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ r^a\,x & r^a\,y & r^a\,z \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{bmatrix} \overline{\operatorname{rot}}(\vec{f}), \quad \text{con} \quad \overline{\operatorname{rot}}(\vec{f}) = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y}(r^a\,z) - \dfrac{\partial}{\partial z}(r^a\,y) \\ \dfrac{\partial}{\partial z}(r^a\,x) - \dfrac{\partial}{\partial x}(r^a\,z) \\ \dfrac{\partial}{\partial x}(r^a\,y) - \dfrac{\partial}{\partial y}(r^a\,x) \end{Bmatrix},$$

luego

$$\overline{\mathrm{rot}}(\vec{f}) = \begin{Bmatrix} a\,r^{a-1}\,\dfrac{\partial r}{\partial y}\,z - a\,r^{a-1}\,\dfrac{\partial r}{\partial z}\,y \\ a\,r^{a-1}\,\dfrac{\partial r}{\partial z}\,x - a\,r^{a-1}\,\dfrac{\partial r}{\partial x}\,z \\ a\,r^{a-1}\,\dfrac{\partial r}{\partial x}\,y - a\,r^{a-1}\,\dfrac{\partial r}{\partial y}\,x \end{Bmatrix} = a\,r^{a-2}\begin{Bmatrix} y\,z - z\,y \\ z\,x - x\,z \\ x\,y - y\,x \end{Bmatrix} = \bar{0}.$$

Por tanto,

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{f}\right) = \vec{0} \quad \forall a \in \mathbb{R}.}$$

Nota: En consecuencia, todos los campos de este tipo son IRROTACIONALES o, lo que es lo mismo, CONSERVATIVOS.

En el problema siguiente se demuestra que todos los campos de fuerzas CENTRALES son necesariamente IRROTACIONALES.

En consecuencia, y teniendo en cuenta lo expuesto en el apartado anterior, se observa que los únicos campos de fuerzas CENTRALES que también son ARMÓNICOS (es decir SOLENOIDALES e IRROTACIONALES) son los campos de tipo NEWTONIANO.

4.– Sea el campo vectorial $\vec{f}(\bar{r}) = f(r)\ (\vec{r}/r)$, donde $f(r)$ es una función escalar cualquiera, $r = |\vec{r}|$ y $\vec{r}$ es el vector de posición. Demostrar que el campo vectorial $\vec{f}(\bar{r})$ es irrotacional.

SOLUCIÓN:

$$\bar{r} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}, \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad \bar{f} = f(r)\begin{Bmatrix} x/r \\ y/r \\ z/r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} g(r)\,x \\ g(r)\,y \\ g(r)\,z \end{Bmatrix} \quad \text{con } g(r) = \frac{f(r)}{r}.$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{f}\right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ g(r)\,x & g(r)\,y & g(r)\,z \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{bmatrix} \overline{\mathrm{rot}}(\vec{f}), \quad \text{con} \quad \overline{\mathrm{rot}}(\vec{f}) = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y}(g(r)\,z) - \dfrac{\partial}{\partial z}(g(r)\,y) \\ \dfrac{\partial}{\partial z}(g(r)\,x) - \dfrac{\partial}{\partial x}(g(r)\,z) \\ \dfrac{\partial}{\partial x}(g(r)\,y) - \dfrac{\partial}{\partial y}(g(r)\,x) \end{Bmatrix},$$

luego

$$\overline{\mathrm{rot}}(\vec{f}) = \begin{Bmatrix} g'(r)\,\dfrac{\partial r}{\partial y}\,z - g'(r)\,\dfrac{\partial r}{\partial z}\,y \\ g'(r)\,\dfrac{\partial r}{\partial z}\,x - g'(r)\,\dfrac{\partial r}{\partial x}\,z \\ g'(r)\,\dfrac{\partial r}{\partial x}\,y - g'(r)\,\dfrac{\partial r}{\partial y}\,x \end{Bmatrix} = g'(r)\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial y}\,z - \dfrac{\partial r}{\partial z}\,y \\ \dfrac{\partial r}{\partial z}\,x - \dfrac{\partial r}{\partial x}\,z \\ \dfrac{\partial r}{\partial x}\,y - \dfrac{\partial r}{\partial y}\,x \end{Bmatrix}.$$

Pero,

$$r^2 = x^2+y^2+z^2 \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} 2\,r\,\dfrac{\partial r}{\partial x} = 2\,x \\ 2\,r\,\dfrac{\partial r}{\partial y} = 2\,y \\ 2\,r\,\dfrac{\partial r}{\partial z} = 2\,z \end{Bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{x}{r} \\ \dfrac{\partial r}{\partial y} = \dfrac{y}{r} \\ \dfrac{\partial r}{\partial z} = \dfrac{z}{r} \end{Bmatrix},$$

luego

$$\overline{\mathrm{rot}}(\vec{f}) = g'(r) \begin{Bmatrix} \dfrac{y}{r}\, z - \dfrac{z}{r}\, y \\ \dfrac{z}{r}\, x - \dfrac{x}{r}\, z \\ \dfrac{x}{r}\, y - \dfrac{y}{r}\, x \end{Bmatrix} = \frac{g'(r)}{r} \begin{Bmatrix} y\, z - z\, y \\ z\, x - x\, z \\ x\, y - y\, x \end{Bmatrix} = \bar{0}.$$

Por tanto,

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{f}\right) = \vec{0} \quad \forall \vec{f}(\bar{r}) = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{bmatrix}\ \bar{f}(\bar{r}) \quad \text{con} \quad \bar{f}(\bar{r}) = f(r)\ (\bar{r}/r)\,.}$$

5.– Sea el sistema de coordenadas curvilíneas (cilíndricas) definidas por la transformación

$$\bar{r} = \bar{\Psi}(\bar{u}), \qquad \text{donde} \quad \bar{r} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}, \quad \bar{u} = \begin{Bmatrix} \rho \\ \theta \\ z \end{Bmatrix}, \quad \bar{\Psi}(\bar{u}) = \begin{Bmatrix} \rho\ \cos(\theta) \\ \rho\ \mathrm{sen}(\theta) \\ z \end{Bmatrix}$$

y sean el campo escalar $f(\bar{u}) = f(\rho, \theta, z)$ y el campo vectorial

$$\vec{f}(\bar{u}) = \vec{h}_\rho\ f^\rho(\rho, \theta, z) + \vec{h}_\theta\ f^\theta(\rho, \theta, z) + \vec{h}_z\ f^z(\rho, \theta, z).$$

Se pide:

a) Obtener la base natural, la base dual y la base normalizada.
b) Obtener la expresión del gradiente del campo escalar $f(\rho, \theta, z)$ en la base dual. Reescribir la expresión anterior en las bases natural y normalizada.
c) Obtener la expresión de la divergencia del campo vectorial $\vec{f}(\rho, \theta, z)$.
d) Obtener la expresión del rotacional del campo vectorial $\vec{f}(\rho, \theta, z)$ en la base natural. Reescribir la expresión anterior en las bases dual y normalizada.
e) Si el campo vectorial $\vec{f}(\bar{u})$ viniese dado por sus componentes físicas

$$\vec{f}(\bar{u}) = \widehat{h}_\rho\ F^\rho(\rho, \theta, z) + \widehat{h}_\theta\ F^\theta(\rho, \theta, z) + \widehat{h}_z\ F^z(\rho, \theta, z),$$

¿qué modificaciones habría que introducir en las expresiones anteriores? Escribir los operadores divergencia y rotacional en la base normalizada.

SOLUCIÓN:

a) Obtener la base natural, la base dual y la base normalizada.

<u>Base Natural:</u>

$$\boxed{\underset{\sim}{H} = \begin{bmatrix} \vec{h}_\rho & \vec{h}_\theta & \vec{h}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \rho} & \dfrac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \theta} & \dfrac{\partial \bar{\Psi}}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\rho\ \mathrm{sen}\,\theta & 0 \\ \mathrm{sen}\,\theta & \rho\ \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.}$$

<u>Tensor Métrico, determinante e inversa:</u>

$$\underset{\sim}{G} = \underset{\sim}{H}^T\ \underset{\sim}{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad g = \rho^2; \quad \underset{\sim}{G}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Además,

$$\underset{\sim}{G}_d = \left[\mathrm{diag}(\underset{\sim}{G})\right] \quad \Longrightarrow \quad \underset{\sim}{G}_d^{1/2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underset{\sim}{G}_d^{-1/2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\rho & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Base Dual:

$$\boxed{\widetilde{H} = \left[\vec{h}^{\,\rho} \quad \vec{h}^{\,\theta} \quad \vec{h}^{\,z}\right] = \underset{\sim}{H}\, \underset{\sim}{G}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -(1/\rho)\,\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & (1/\rho)\,\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.}$$

Base Normalizada:

$$\boxed{\underset{\sim}{\widehat{H}} = \left[\widehat{h}_\rho \quad \widehat{h}_\theta \quad \widehat{h}_z\right] = \underset{\sim}{H}\, \underset{\sim}{G}_d^{-1/2} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.}$$

Formas de escribir un vector:

$$\vec{f} = \underset{\sim}{H}\, \bar{f} = \widetilde{H}\, \underline{f} = \underset{\sim}{\widehat{H}}\, \bar{F},$$

donde

$$\begin{array}{lll} \text{COMP. CONTRAVARIANTES} & \rightarrow \bar{f} = \begin{Bmatrix} f^\rho \\ f^\theta \\ f^z \end{Bmatrix} & \\ \text{COMP. COVARIANTES} & \rightarrow \underline{f} = \begin{Bmatrix} f_\rho \\ f_\theta \\ f_z \end{Bmatrix} = \underset{\sim}{G}\, \bar{f} = \begin{Bmatrix} f^\rho \\ \rho^2 f^\theta \\ f^z \end{Bmatrix} & . \\ \text{COMP. FÍSICAS} & \rightarrow \bar{F} = \begin{Bmatrix} F^\rho \\ F^\theta \\ F^z \end{Bmatrix} = \underset{\sim}{G}_d^{1/2}\, \bar{f} = \begin{Bmatrix} f^\rho \\ \rho\, f^\theta \\ f^z \end{Bmatrix} & \end{array}$$

b) Obtener la expresión del gradiente del campo escalar $f(\rho,\theta,z)$ en la base dual. Reescribir la expresión anterior en las bases natural y normalizada.

Pretendemos escribir el gradiente en las formas siguientes:

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \underset{\sim}{H}\, \overline{\text{grad}}(f), = \widetilde{H}\, \underline{\text{grad}}(f) = \underset{\sim}{\widehat{H}}\, \overline{\text{GRAD}}(f).$$

Por definición

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \vec{h}^{\,j}\, f_{,j} \quad \text{con} \quad f_{,j} = \frac{\partial f}{\partial u^j},$$

luego

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \vec{h}^{\,\rho}\, \frac{\partial f}{\partial \rho} + \vec{h}^{\,\theta}\, \frac{\partial f}{\partial \theta} + \vec{h}^{\,z}\, \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Gradiente en la Base Dual:

A partir de la expresión anterior se obtiene directamente

$$\boxed{\underline{\text{grad}}(f) = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial \rho} \\ \dfrac{\partial f}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{Bmatrix}.}$$

Gradiente en la Base Natural:

$$\boxed{\overline{\text{grad}}(f) = \underset{\sim}{G}^{-1}\; \underline{\text{grad}}(f) = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial \rho} \\ \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial f}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{Bmatrix}.}$$

Gradiente en la Base Normalizada:

$$\boxed{\overline{\mathrm{GRAD}}(f) = \underset{\sim}{G}_d^{1/2}\ \overline{\mathrm{grad}}(f) = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial \rho} \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial f}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{Bmatrix}.}$$

c) Obtener la expresión de la divergencia del campo vectorial $\vec{f}(\rho, \theta, z)$.

Por definición

$$\mathrm{div}(\vec{f}\,) = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial u^i}\left(\sqrt{g}\, f^i\right),$$

luego

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(\vec{f}\,) &= \frac{1}{\sqrt{\rho^2}}\left(\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\sqrt{\rho^2}\, f^\rho\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sqrt{\rho^2}\, f^\theta\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\sqrt{\rho^2}\, f^z\right)\right)\\ &= \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\, f^\rho\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\rho\, f^\theta\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\, f^z\right)\right),\end{aligned}$$

y finalmente

$$\boxed{\mathrm{div}(\vec{f}\,) = \left(\frac{\partial f^\rho}{\partial \rho} + \frac{\partial f^\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial f^z}{\partial z}\right) + \frac{1}{\rho}\, f^\rho.}$$

d) Obtener la expresión del rotacional del campo vectorial $\vec{f}(\rho, \theta, z)$ en la base natural.
Reescribir la expresión anterior en las bases dual y normalizada.

Pretendemos escribir el rotacional en las formas siguientes:

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{f}\,) = \underset{\sim}{H}\ \overline{\mathrm{rot}}(\vec{f}\,), = \widetilde{H}\ \underline{\mathrm{rot}}(\vec{f}\,) = \widehat{\underset{\sim}{H}}\ \overline{\mathrm{ROT}}(\vec{f}\,).$$

Por definición

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{f}\,) = \pm\frac{1}{\sqrt{g}}\begin{vmatrix} \vec{h}_\rho & \vec{h}_\theta & \vec{h}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial \rho} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f_\rho & f_\theta & f_z \end{vmatrix} \quad \text{con} \quad \vec{f} = \widetilde{H}\ \underline{f}, \quad \underline{f} = \begin{Bmatrix} f_\rho \\ f_\theta \\ f_z \end{Bmatrix}.$$

En este caso el signo es positivo, dado que $\det(\underset{\sim}{H}) = \rho > 0 \Longrightarrow$ QUIRALIDAD POSITIVA.
Escribiendo las componentes covariantes en función de las contravariantes,

$$\underline{f} = \begin{Bmatrix} f_\rho \\ f_\theta \\ f_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f^\rho \\ \rho^2\, f^\theta \\ f^z \end{Bmatrix},$$

y desarrollando la definición del rotacional, se obtiene

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{f}\,) &= \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\vec{h}_\rho\left(\frac{\partial f_z}{\partial \theta} - \frac{\partial f_\theta}{\partial z}\right) + \vec{h}_\theta\left(\frac{\partial f_\rho}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial \rho}\right) + \vec{h}_z\left(\frac{\partial f_\theta}{\partial \rho} - \frac{\partial f_\rho}{\partial \theta}\right)\right)\\ &= \begin{bmatrix} \vec{h}_\rho & \vec{h}_\theta & \vec{h}_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial f^z}{\partial \theta} - \dfrac{\partial}{\partial z}(\rho^2\, f^\theta)\right) \\ \dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial f^\rho}{\partial z} - \dfrac{\partial f^z}{\partial \rho}\right) \\ \dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial}{\partial \rho}(\rho^2\, f^\theta) - \dfrac{\partial f^\rho}{\partial \theta}\right) \end{Bmatrix}.\end{aligned}$$

Rotacional en la Base Natural:
A partir de la expresión anterior se obtiene directamente

$$\boxed{\overline{\mathrm{rot}}(\vec{f}\,) = \frac{1}{\rho}\left\{\begin{matrix} \left(\dfrac{\partial f^z}{\partial \theta} - \rho^2\,\dfrac{\partial f^\theta}{\partial z}\right) \\ \left(\dfrac{\partial f^\rho}{\partial z} - \dfrac{\partial f^z}{\partial \rho}\right) \\ \left(\rho^2\,\dfrac{\partial f^\theta}{\partial \rho} - \dfrac{\partial f^\rho}{\partial \theta} + 2\,\rho\,f^\theta\right) \end{matrix}\right\}.}$$

Rotacional en la Base Dual:

$$\boxed{\underline{\mathrm{rot}}(\vec{f}\,) = \underset{\sim}{G}\;\overline{\mathrm{rot}}(\vec{f}\,) = \frac{1}{\rho}\left\{\begin{matrix} \left(\dfrac{\partial f^z}{\partial \theta} - \rho^2\,\dfrac{\partial f^\theta}{\partial z}\right) \\ \rho^2\left(\dfrac{\partial f^\rho}{\partial z} - \dfrac{\partial f^z}{\partial \rho}\right) \\ \left(\rho^2\,\dfrac{\partial f^\theta}{\partial \rho} - \dfrac{\partial f^\rho}{\partial \theta} + 2\,\rho\,f^\theta\right) \end{matrix}\right\}.}$$

Rotacional en la Base Normalizada:

$$\boxed{\overline{\mathrm{ROT}}(\vec{f}\,) = \underset{\sim}{G}_d^{1/2}\;\overline{\mathrm{rot}}(\vec{f}\,) = \frac{1}{\rho}\left\{\begin{matrix} \left(\dfrac{\partial f^z}{\partial \theta} - \rho^2\,\dfrac{\partial f^\theta}{\partial z}\right) \\ \rho\left(\dfrac{\partial f^\rho}{\partial z} - \dfrac{\partial f^z}{\partial \rho}\right) \\ \left(\rho^2\,\dfrac{\partial f^\theta}{\partial \rho} - \dfrac{\partial f^\rho}{\partial \theta} + 2\,\rho\,f^\theta\right) \end{matrix}\right\}.}$$

e) Si el campo vectorial $\vec{f}(\bar{u})$ viniese dado por sus componentes físicas,

$$\vec{f}(\bar{u}) = \widehat{h}_\rho\;F^\rho(\rho,\theta,z) + \widehat{h}_\theta\;F^\theta(\rho,\theta,z) + \widehat{h}_z\;F^z(\rho,\theta,z),$$

¿qué modificaciones habría que introducir en las expresiones anteriores?
Escribir los operadores divergencia y rotacional en la base normalizada.

Bastaría con escribir las componentes contravariantes en función de las componentes físicas, y sustituir estos valores en las expresiones halladas previamente.
En este caso,

$$\bar{f} = \left\{\begin{matrix} f^\rho \\ f^\theta \\ f^z \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} F^\rho \\ (1/\rho)\,F^\theta \\ F^z \end{matrix}\right\}.$$

Sustituyendo estos valores en la expresión de la divergencia hallada previamente, obtenemos

$$\mathrm{div}(\vec{f}) = \left(\frac{\partial F^\rho}{\partial \rho} + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{\rho}\,F^\theta\right) + \frac{\partial F^z}{\partial z}\right) + \frac{1}{\rho}\,F^\rho,$$

y finalmente

$$\boxed{\mathrm{div}(\vec{f}) = \left(\frac{\partial F^\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial F^\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial F^z}{\partial z}\right) + \frac{1}{\rho}\,F^\rho.}$$

En el caso del rotacional

$$\overline{\text{ROT}}(\vec{f}\,) = \frac{1}{\rho}\left\{\begin{array}{c} \left(\dfrac{\partial F^z}{\partial \theta} - \rho^2\,\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{1}{\rho}\,F^\theta\right)\right) \\ \rho\,\left(\dfrac{\partial F^\rho}{\partial z} - \dfrac{\partial F^z}{\partial \rho}\right) \\ \left(\rho^2\,\dfrac{\partial}{\partial \rho}\left(\dfrac{1}{\rho}\,F^\theta\right) - \dfrac{\partial F^\rho}{\partial \theta} + 2\,\rho\,\dfrac{1}{\rho}\,F^\theta\right) \end{array}\right\},$$

y finalmente

$$\boxed{\overline{\text{ROT}}(\vec{f}\,) = \frac{1}{\rho}\left\{\begin{array}{c} \left(\dfrac{\partial F^z}{\partial \theta} - \rho\,\dfrac{\partial F^\theta}{\partial z}\right) \\ \rho\,\left(\dfrac{\partial F^\rho}{\partial z} - \dfrac{\partial F^z}{\partial \rho}\right) \\ \left(\rho\,\dfrac{\partial F^\theta}{\partial \rho} - \dfrac{\partial F^\rho}{\partial \theta} + F^\theta\right) \end{array}\right\}.}$$

APARTADO ADICIONAL: Obtener la expresión del laplaciano del campo escalar $f(\rho,\theta,z)$

Por definición

$$\Delta f = \text{div}\big(\overrightarrow{\text{grad}}(f)\big) = \text{div}(\vec{g}\,) \quad \text{con} \quad \vec{g} = \overrightarrow{\text{grad}}(f),$$

donde

$$\text{div}(\vec{g}\,) = \left(\frac{\partial g^\rho}{\partial \rho} + \frac{\partial g^\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial g^z}{\partial z}\right) + \frac{g^\rho}{\rho},$$

y

$$\vec{g} = \underset{\sim}{H}\,\bar{g} \quad \text{con} \quad \bar{g} = \left\{\begin{array}{c} g^\rho \\ g^\theta \\ g^z \end{array}\right\} = \overline{\text{grad}}(f) = \left\{\begin{array}{c} \dfrac{\partial f}{\partial \rho} \\ \dfrac{1}{\rho^2}\,\dfrac{\partial f}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{array}\right\}.$$

Luego

$$\text{div}(\vec{g}\,) = \left(\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{\rho^2}\,\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right) + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial f}{\partial \rho},$$

y finalmente

$$\boxed{\Delta f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right) + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial f}{\partial \rho}.}$$

6.– Sea el sistema de coordenadas curvilíneas (esféricas) definidas por la transformación

$$\bar{r} = \bar{\Psi}(\bar{u}), \qquad \text{donde} \quad \bar{r} = \left\{\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right\}, \quad \bar{u} = \left\{\begin{array}{c} r \\ \theta \\ \varphi \end{array}\right\}, \quad \bar{\Psi}(\bar{u}) = \left\{\begin{array}{c} r\ \text{sen}(\varphi)\ \cos(\theta) \\ r\ \text{sen}(\varphi)\ \text{sen}(\theta) \\ r\ \cos(\varphi) \end{array}\right\}$$

y sean el campo escalar $f(\bar{u}) = f(r,\theta,\varphi)$ y el campo vectorial

$$\vec{f}(\bar{u}) = \vec{h}_r\ f^r(r,\theta,\varphi) + \vec{h}_\theta\ f^\theta(r,\theta,\varphi) + \vec{h}_\varphi\ f^\varphi(r,\theta,\varphi).$$

Se pide:

a) Obtener la base natural, la base dual y la base normalizada.
b) Obtener la expresión del gradiente del campo escalar $f(r,\theta,\varphi)$ en la base dual.
Reescribir la expresión anterior en las bases natural y normalizada.
c) Obtener la expresión de la divergencia del campo vectorial $\vec{f}(r,\theta,\varphi)$.
d) Obtener la expresión del rotacional del campo vectorial $\vec{f}(r,\theta,\varphi)$ en la base natural.
Reescribir la expresión anterior en las bases dual y normalizada.
e) Si el campo vectorial $\vec{f}(\bar{u})$ viniese dado por sus componentes físicas

$$\vec{f}(\bar{u}) = \widehat{h}_r\, F^r(r,\theta,\varphi) + \widehat{h}_\theta\, F^\theta(r,\theta,\varphi) + \widehat{h}_\varphi\, F^\varphi(r,\theta,\varphi),$$

¿qué modificaciones habría que introducir en las expresiones anteriores?
Escribir los operadores divergencia y rotacional en la base normalizada.

SOLUCIÓN:

a) Obtener la base natural, la base dual y la base normalizada.

Base Natural:

$$\boxed{\underset{\sim}{H} = \begin{bmatrix} \vec{h}_r & \vec{h}_\theta & \vec{h}_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \bar{\Psi}}{\partial r} & \dfrac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \theta} & \dfrac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\varphi\,\cos\theta & -r\,\operatorname{sen}\varphi\,\operatorname{sen}\theta & r\,\cos\varphi\,\cos\theta \\ \operatorname{sen}\varphi\,\operatorname{sen}\theta & r\,\operatorname{sen}\varphi\,\cos\theta & r\,\cos\varphi\,\operatorname{sen}\theta \\ \cos\varphi & 0 & -r\,\operatorname{sen}\varphi \end{bmatrix}.}$$

Tensor Métrico, determinante e inversa:

$$\underset{\sim}{G} = \underset{\sim}{H}^T\,\underset{\sim}{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2\,\operatorname{sen}^2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{bmatrix}; \quad g = r^4\,\operatorname{sen}^2\varphi; \quad \underset{\sim}{G}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/(r^2\,\operatorname{sen}^2\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1/r^2 \end{bmatrix}.$$

Además,

$$\underset{\sim}{G}_d = \left[\operatorname{diag}(\underset{\sim}{G})\right] \quad \Longrightarrow \quad \underset{\sim}{G}_d^{1/2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r\,\operatorname{sen}\varphi & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix}, \quad \underset{\sim}{G}_d^{-1/2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/(r\,\operatorname{sen}\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1/r \end{bmatrix}.$$

Base Dual:

$$\boxed{\underset{\sim}{\widetilde{H}} = \begin{bmatrix} \vec{h}^r & \vec{h}^\theta & \vec{h}^\varphi \end{bmatrix} = \underset{\sim}{H}\,\underset{\sim}{G}^{-1} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\varphi\,\cos\theta & -(1/r)\,(\operatorname{sen}\theta/\operatorname{sen}\varphi) & (1/r)\,\cos\varphi\,\cos\theta \\ \operatorname{sen}\varphi\,\operatorname{sen}\theta & (1/r)\,(\cos\theta/\operatorname{sen}\varphi) & (1/r)\,\cos\varphi\,\operatorname{sen}\theta \\ \cos\varphi & 0 & -(1/r)\,\operatorname{sen}\varphi \end{bmatrix}.}$$

Base Normalizada:

$$\boxed{\underset{\sim}{\widehat{H}} = \begin{bmatrix} \widehat{h}_r & \widehat{h}_\theta & \widehat{h}_\varphi \end{bmatrix} = \underset{\sim}{H}\,\underset{\sim}{G}_d^{-1/2} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\varphi\,\cos\theta & \operatorname{sen}\theta & \cos\varphi\,\cos\theta \\ \operatorname{sen}\varphi\,\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & \cos\varphi\,\operatorname{sen}\theta \\ \cos\varphi & 0 & -\operatorname{sen}\varphi \end{bmatrix}.}$$

Formas de escribir un vector:

$$\vec{f} = \underset{\sim}{H}\,\bar{f} = \underset{\sim}{\widetilde{H}}\,\underset{-}{f} = \underset{\sim}{\widehat{H}}\,\bar{F},$$

donde

$$\text{COMP. CONTRAVARIANTES} \rightarrow \bar{f} = \begin{Bmatrix} f^r \\ f^\theta \\ f^\varphi \end{Bmatrix}$$

$$\text{COMP. COVARIANTES} \rightarrow \underline{f} = \begin{Bmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\varphi \end{Bmatrix} = \underset{\sim}{G}\, \bar{f} = \begin{Bmatrix} & f^r \\ r^2 \operatorname{sen}^2\varphi & f^\theta \\ r^2 & f^\varphi \end{Bmatrix} .$$

$$\text{COMP. FÍSICAS} \rightarrow \bar{F} = \begin{Bmatrix} F^r \\ F^\theta \\ F^\varphi \end{Bmatrix} = \underset{\sim}{G}_d^{1/2}\, \bar{f} = \begin{Bmatrix} & f^r \\ r \operatorname{sen}\varphi & f^\theta \\ r & f^\varphi \end{Bmatrix}$$

b) Obtener la expresión del gradiente del campo escalar $f(r,\theta,\varphi)$ en la base dual. Reescribir la expresión anterior en las bases natural y normalizada.

Pretendemos escribir el gradiente en las formas siguientes:

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \underset{\sim}{H}\, \overline{\text{grad}}(f), = \widetilde{H}\, \underline{\text{grad}}(f) = \underset{\sim}{\widehat{H}}\, \overline{\text{GRAD}}(f).$$

Por definición

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \vec{h}^j\, f_{,j} \quad \text{con} \quad f_{,j} = \frac{\partial f}{\partial u^j},$$

luego

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \vec{h}^r \frac{\partial f}{\partial r} + \vec{h}^\theta \frac{\partial f}{\partial \theta} + \vec{h}^\varphi \frac{\partial f}{\partial \varphi}.$$

<u>Gradiente en la Base Dual:</u>
A partir de la expresión anterior se obtiene directamente

$$\boxed{\underline{\text{grad}}(f) = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial r} \\ \dfrac{\partial f}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial f}{\partial \varphi} \end{Bmatrix} .}$$

<u>Gradiente en la Base Natural:</u>

$$\boxed{\overline{\text{grad}}(f) = \underset{\sim}{G}^{-1}\ \underline{\text{grad}}(f) = \begin{Bmatrix} & \dfrac{\partial f}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r^2}\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\varphi} & \dfrac{\partial f}{\partial \theta} \\ \dfrac{1}{r^2} & \dfrac{\partial f}{\partial \varphi} \end{Bmatrix} .}$$

<u>Gradiente en la Base Normalizada:</u>

$$\boxed{\overline{\text{GRAD}}(f) = \underset{\sim}{G}_d^{1/2}\ \overline{\text{grad}}(f) = \begin{Bmatrix} & \dfrac{\partial f}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{1}{\operatorname{sen}\varphi} & \dfrac{\partial f}{\partial \theta} \\ \dfrac{1}{r} & \dfrac{\partial f}{\partial \varphi} \end{Bmatrix} .}$$

c) Obtener la expresión de la divergencia del campo vectorial $\vec{f}(r,\theta,z)$.

Por definición
$$\operatorname{div}(\vec{f}) = \frac{1}{\sqrt{g}}\,\frac{\partial}{\partial u^i}\left(\sqrt{g}\,f^i\right),$$
luego
$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\vec{f}) &= \frac{1}{\sqrt{r^4\,\operatorname{sen}^2\varphi}}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\sqrt{r^4\,\operatorname{sen}^2\varphi}\,f^r\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sqrt{r^4\,\operatorname{sen}^2\varphi}\,f^\theta\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sqrt{r^4\,\operatorname{sen}^2\varphi}\,f^\varphi\right)\right)\\ &= \frac{1}{r^2\,\operatorname{sen}\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\operatorname{sen}\varphi\,f^r\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(r^2\,\operatorname{sen}\varphi\,f^\theta\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(r^2\,\operatorname{sen}\varphi\,f^\varphi\right)\right),\end{aligned}$$
y finalmente
$$\boxed{\operatorname{div}(\vec{f}) = \left(\frac{\partial f^r}{\partial r} + \frac{\partial f^\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial f^\varphi}{\partial\varphi}\right) + \frac{2}{r}\,f^r + \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}\,f^\varphi.}$$

d) Obtener la expresión del rotacional del campo vectorial $\vec{f}(r,\theta,\varphi)$ en la base natural. Reescribir la expresión anterior en las bases dual y normalizada.

Pretendemos escribir el rotacional en las formas siguientes:
$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{f}\,) = \underset{\sim}{H}\;\overline{\mathrm{rot}}(\vec{f}\,), = \widetilde{H}\;\underline{\mathrm{rot}}(\vec{f}\,) = \underset{\sim}{\widehat{H}}\;\overline{\mathrm{ROT}}(\vec{f}\,).$$
Por definición
$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{f}\,) = \pm\frac{1}{\sqrt{g}}\begin{vmatrix}\vec{h}_r & \vec{h}_\theta & \vec{h}_\varphi\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi}\\ f_r & f_\theta & f_\varphi\end{vmatrix}\quad\text{con}\quad \vec{f} = \widetilde{H}\,\underline{f},\quad \underline{f} = \begin{Bmatrix}f_r\\ f_\theta\\ f_\varphi\end{Bmatrix}.$$
En este caso el signo es negativo, dado que $\det(\underset{\sim}{H}) = -r^2\,\operatorname{sen}\varphi < 0 \Longrightarrow$ QUIRALIDAD NEGATIVA. Escribiendo las componentes covariantes en función de las contravariantes,
$$\underline{f} = \begin{Bmatrix}f_r\\ f_\theta\\ f_\varphi\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}f^r\\ r^2\,\operatorname{sen}^2\varphi\,f^\theta\\ r^2\,f^\varphi\end{Bmatrix},$$
y desarrollando la definición del rotacional, se obtiene
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{f}\,) &= -\frac{1}{\sqrt{g}}\left(\vec{h}_r\left(\frac{\partial f_\varphi}{\partial\theta} - \frac{\partial f_\theta}{\partial\varphi}\right) + \vec{h}_\theta\left(\frac{\partial f_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial f_\varphi}{\partial r}\right) + \vec{h}_\varphi\left(\frac{\partial f_\theta}{\partial r} - \frac{\partial f_r}{\partial\theta}\right)\right)\\ &= \left[\vec{h}_r\;\;\vec{h}_\theta\;\;\vec{h}_\varphi\right]\begin{Bmatrix}\dfrac{-1}{r^2\,\operatorname{sen}\varphi}\left(\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(r^2\,f^\varphi\right) - \dfrac{\partial}{\partial\varphi}\left(r^2\,\operatorname{sen}^2\varphi\,f^\theta\right)\right)\\ \dfrac{-1}{r^2\,\operatorname{sen}\varphi}\left(\dfrac{\partial f^r}{\partial\varphi} - \dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,f^\varphi\right)\right)\\ \dfrac{-1}{r^2\,\operatorname{sen}\varphi}\left(\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\operatorname{sen}^2\varphi\,f^\theta\right) - \dfrac{\partial f^r}{\partial\theta}\right)\end{Bmatrix}.\end{aligned}$$
Rotacional en la Base Natural:
A partir de la expresión anterior se obtiene directamente
$$\boxed{\overline{\mathrm{rot}}(\vec{f}\,) = \frac{-1}{r^2\,\operatorname{sen}\varphi}\begin{Bmatrix}\left(r^2\,\dfrac{\partial f^\varphi}{\partial\theta} - r^2\,\operatorname{sen}^2\varphi\,\dfrac{\partial f^\theta}{\partial\varphi} - r^2\,\operatorname{sen}(2\varphi)\,f^\theta\right)\\ \left(\dfrac{\partial f^r}{\partial\varphi} - r^2\,\dfrac{\partial f^\varphi}{\partial r} - 2\,r\,f^\varphi\right)\\ \left(r^2\,\operatorname{sen}^2\varphi\,\dfrac{\partial f^\theta}{\partial r} - \dfrac{\partial f^r}{\partial\theta} + 2\,r\,\operatorname{sen}^2\varphi\,f^\theta\right)\end{Bmatrix}.}$$

Rotacional en la Base Dual:

$$\boxed{\underline{\mathrm{rot}}(\vec{f}\,) = \underset{\sim}{G}\ \overline{\mathrm{rot}}(\vec{f}\,) = \frac{-1}{r^2\ \mathrm{sen}\,\varphi} \left\{ \begin{array}{c} \left(r^2 \dfrac{\partial f^\varphi}{\partial \theta} - r^2\ \mathrm{sen}^2\,\varphi\, \dfrac{\partial f^\theta}{\partial \varphi} - r^2\ \mathrm{sen}(2\varphi)\, f^\theta \right) \\ r^2\ \mathrm{sen}^2\,\varphi \left(\dfrac{\partial f^r}{\partial \varphi} - r^2 \dfrac{\partial f^\varphi}{\partial r} - 2\, r\, f^\varphi \right) \\ r^2 \left(r^2\ \mathrm{sen}^2\,\varphi\, \dfrac{\partial f^\theta}{\partial r} - \dfrac{\partial f^r}{\partial \theta} + 2\, r\ \mathrm{sen}^2\,\varphi\, f^\theta \right) \end{array} \right\}.}$$

Rotacional en la Base Normalizada:

$$\boxed{\overline{\mathrm{ROT}}(\vec{f}\,) = \underset{\sim}{G}_d^{1/2}\ \overline{\mathrm{rot}}(\vec{f}\,) = \frac{-1}{r^2\ \mathrm{sen}\,\varphi} \left\{ \begin{array}{c} \left(r^2 \dfrac{\partial f^\varphi}{\partial \theta} - r^2\ \mathrm{sen}^2\,\varphi\, \dfrac{\partial f^\theta}{\partial \varphi} - r^2\ \mathrm{sen}(2\varphi)\, f^\theta \right) \\ r\ \mathrm{sen}\,\varphi \left(\dfrac{\partial f^r}{\partial \varphi} - r^2 \dfrac{\partial f^\varphi}{\partial r} - 2\, r\, f^\varphi \right) \\ r \left(r^2\ \mathrm{sen}^2\,\varphi\, \dfrac{\partial f^\theta}{\partial r} - \dfrac{\partial f^r}{\partial \theta} + 2\, r\ \mathrm{sen}^2\,\varphi\, f^\theta \right) \end{array} \right\}.}$$

e) Si el campo vectorial $\vec{f}(\bar{u})$ viniese dado por sus componentes físicas

$$\vec{f}(\bar{u}) = \widehat{h}_r\ F^\rho(\rho,\theta,z) + \widehat{h}_\theta\ F^\theta(\rho,\theta,z) + \widehat{h}_\varphi\ F^z(\rho,\theta,z),$$

¿qué modificaciones habría que introducir en las expresiones anteriores?
Escribir los operadores divergencia y rotacional en la base normalizada.

Bastaría con escribir las componentes contravariantes en función de las componentes físicas, y sustituir estos valores en las expresiones halladas previamente.
En este caso,

$$\bar{f} = \left\{ \begin{array}{c} f^r \\ f^\theta \\ f^\varphi \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{lr} & F^r \\ (1/r)\,(1/\,\mathrm{sen}\,\varphi) & F^\theta \\ (1/r) & F^\varphi \end{array} \right\}.$$

Sustituyendo estos valores en la expresión de la divergencia hallada previamente, obtenemos

$$\mathrm{div}(\vec{f}) = \left(\frac{\partial F^r}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r\ \mathrm{sen}\,\varphi} F^\theta \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r} F^\varphi \right) \right) + \frac{2}{r} F^r + \frac{1}{\mathrm{tg}\,\varphi} \frac{1}{r} F^\varphi,$$

y finalmente

$$\boxed{\mathrm{div}(\vec{f}) = \left(\frac{\partial F^r}{\partial r} + \frac{1}{r\ \mathrm{sen}\,\varphi} \frac{\partial F^\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial F^\varphi}{\partial \varphi} \right) + \frac{2}{r} F^r + \frac{1}{r\ \mathrm{tg}\,\varphi} F^\varphi.}$$

En el caso del rotacional

$$\overline{\mathrm{ROT}}(\vec{f}\,) = \frac{-1}{r^2\ \mathrm{sen}\,\varphi} \left\{ \begin{array}{c} \left(r^2 \dfrac{\partial}{\partial \theta} \left(\dfrac{1}{r} F^\varphi \right) - r^2\ \mathrm{sen}^2\,\varphi\, \dfrac{\partial}{\partial \varphi} \left(\dfrac{1}{r\ \mathrm{sen}\,\varphi} F^\theta \right) - r^2\ \mathrm{sen}(2\varphi) \left(\dfrac{1}{r\ \mathrm{sen}\,\varphi} F^\theta \right) \right) \\ r\ \mathrm{sen}\,\varphi \left(\dfrac{\partial F^r}{\partial \varphi} - r^2 \dfrac{\partial}{\partial r} \left(\dfrac{1}{r} F^\varphi \right) - 2\, r \left(\dfrac{1}{r} F^\varphi \right) \right) \\ r \left(r^2\ \mathrm{sen}^2\,\varphi\, \dfrac{\partial}{\partial r} \left(\dfrac{1}{r\ \mathrm{sen}\,\varphi} F^\theta \right) - \dfrac{\partial F^r}{\partial \theta} \right) + 2\, r\ \mathrm{sen}^2\,\varphi \left(\dfrac{1}{r\ \mathrm{sen}\,\varphi} F^\theta \right) \end{array} \right\}.$$

y finalmente

$$\boxed{\overline{\text{ROT}}(\vec{f}\,) = \underset{\sim}{G}_d^{1/2}\ \overline{\text{rot}}(\vec{f}\,) = \frac{-1}{r^2\ \text{sen}\,\varphi}\begin{Bmatrix} \left(r\,\dfrac{\partial F^{\varphi}}{\partial \theta} - r\ \text{sen}\,\varphi\,\dfrac{\partial F^{\theta}}{\partial \varphi} - r\,\cos\varphi\,F^{\theta}\right) \\ r\ \text{sen}\,\varphi\left(\dfrac{\partial F^{r}}{\partial \varphi} - r\,\dfrac{\partial F^{\varphi}}{\partial r} - F^{\varphi}\right) \\ r\left(r\ \text{sen}\,\varphi\,\dfrac{\partial F^{\theta}}{\partial r} - \dfrac{\partial F^{r}}{\partial \theta} + \text{sen}\,\varphi\,F^{\theta}\right) \end{Bmatrix}.}$$

APARTADO ADICIONAL: Obtener la expresión del laplaciano del campo escalar $f(\rho, \theta, z)$

Por definición

$$\Delta f = \text{div}\left(\overrightarrow{\text{grad}}(f)\right) = \text{div}(\vec{g}\,) \quad \text{con} \quad \vec{g} = \overrightarrow{\text{grad}}(f),$$

donde

$$\text{div}(\vec{g}) = \left(\frac{\partial g^{\,r}}{\partial r} + \frac{\partial g^{\,\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial g^{\,\varphi}}{\partial \varphi}\right) + \frac{2}{r}\,g^{\,r} + \frac{1}{\text{tg}\,\varphi}\,g^{\,\varphi},$$

y

$$\vec{g} = \underset{\sim}{H}\,\bar{g} \quad \text{con} \quad \bar{g} = \begin{Bmatrix} g^{\,r} \\ g^{\,\theta} \\ g^{\,\varphi} \end{Bmatrix} = \overline{\text{grad}}(f) = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r^2}\,\dfrac{1}{\text{sen}^2\,\varphi}\,\dfrac{\partial f}{\partial \theta} \\ \dfrac{1}{r^2}\,\dfrac{\partial f}{\partial \varphi} \end{Bmatrix}.$$

Luego

$$\text{div}(\vec{g}\,) = \left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{r^2\ \text{sen}^2\,\varphi}\,\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)\right) + \frac{2}{r}\,\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{\text{tg}\,\varphi}\,\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial f}{\partial \varphi},$$

y finalmente

$$\boxed{\Delta f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\ \text{sen}^2\,\varphi}\,\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}\right) + \frac{2}{r}\,\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2\ \text{tg}\,\varphi}\,\frac{\partial f}{\partial \varphi}.}$$

7.– Calcular directamente la circulación de la función vectorial

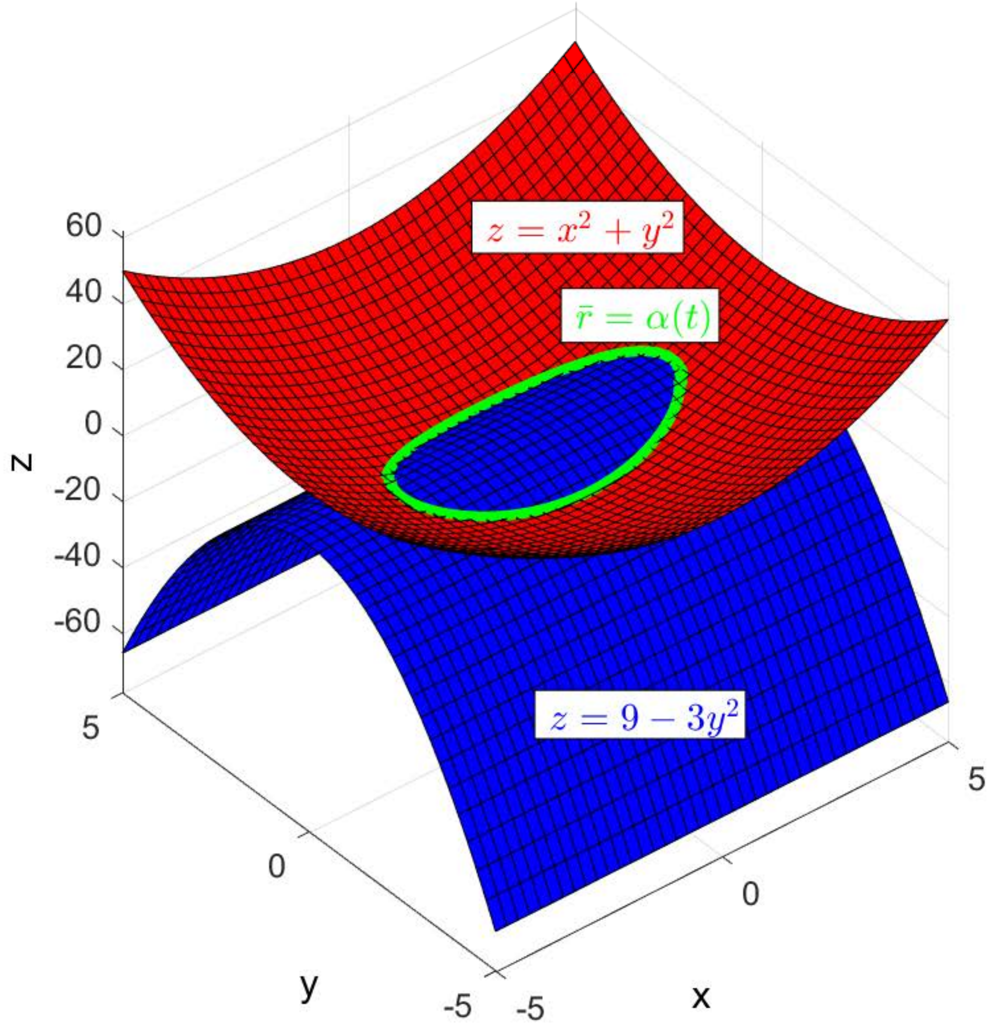
$$\bar{f}(\bar{r}) = \begin{Bmatrix} y - z + 9 \\ z - x - 9 \\ x - y \end{Bmatrix}$$

a lo largo de la curva $C = \{(x, y, z) \mid 3y^2 + z = 9,\ x^2 + y^2 = z\}$.
Comprobar el resultado anterior aplicando el Teorema de Stokes.

SOLUCIÓN:

La curva C es la intersección de las superficies definidas mediante las ecuaciones explícitas

$$\begin{cases} z = 9 - 3\,y^2 & \rightarrow \text{CILINDRO DE SECCIÓN PARÁBOLICA Y EJE HORIZONTAL (PARALELO AL EJE X)} \\ z = x^2 + y^2 & \rightarrow \text{PARABOLOIDE DE SECCIÓN CIRCULAR Y EJE VERTICAL} \end{cases}$$



Por tanto, los puntos de la curva C verifican

$$9 - 3\,y^2 = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 4\,y^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad (x/a)^2 + (y/b)^2 = 1, \;\text{ con } a = 3,\; b = 3/2$$

La última expresión indica que la proyección de C sobre el plano horizontal es una elipse centrada en el origen con semieje mayor $a = 3$ y semieje menor $b = 3/2$ (orientados según los ejes X e Y respectivamente).
En consecuencia la curva C puede expresarse en la forma paramétrica siguiente

$$x = 3\,\cos\theta, \quad y = (3/2)\,\sin\theta, \quad z = x^2 + y^2, \quad \text{con } \theta \in [0, 2\pi],$$

o, lo que es lo mismo,

$$\bar{r} = \bar{\alpha}(\theta) = \begin{Bmatrix} 3\,\cos\theta \\ (3/2)\,\operatorname{sen}\theta \\ 9 - (27/4)\,\operatorname{sen}^2\theta \end{Bmatrix}, \text{ con } \theta \in [0, 2\pi] \quad \Rightarrow \quad d\bar{r} = \begin{Bmatrix} -3\,\operatorname{sen}\theta \\ (3/2)\,\cos\theta \\ -(27/2)\,\operatorname{sen}\theta\,\cos\theta \end{Bmatrix} d\theta.$$

Particularizando el campo vectorial a lo largo de la curva, se obtiene

$$\bar{f}(\bar{r})\Big|_{\bar{r}=\bar{\alpha}(\theta)} = \begin{Bmatrix} (3/2)\,\operatorname{sen}\theta + (27/4)\,\operatorname{sen}^2\theta \\ (-27/4)\,\operatorname{sen}^2\theta - 3\,\cos\theta \\ 3\,\cos\theta - (3/2)\,\operatorname{sen}\theta \end{Bmatrix},$$

lo que permite evaluar la integral de línea en la forma

$$\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{9}{2} - \frac{81}{4}\operatorname{sen}^3\theta - \frac{81}{2}\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta + \frac{81}{8}\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta \right) d\theta = -9\,\pi.$$

A continuación obtendremos el mismo resultado aplicando el Teorema de Stokes

$$\oint_C \vec{f}\cdot d\vec{r} = \iint_\Gamma \overrightarrow{\text{rot}}\left(\vec{f}\right)\cdot \vec{n}\, d\Gamma,$$

donde Γ es cualquier superficie tal que $C=\partial\Gamma$.
Puesto que la curva C es la intersección de las superficies $z=9-3\,y^2$ y $z=x^2+y^2$, podemos elegir una cualquiera de las dos y utilizar como Γ la parte limitada por la curva C.
Eligiendo $z=x^2+y^2$ (por ejemplo) la superficie Γ puede expresarse en la forma paramétrica siguiente:

$$x=\big(3\,\cos\theta\big)\,\rho,\quad y=\big((3/2)\,\sin\theta\big)\,\rho,\quad z=x^2+y^2,\quad \text{con}\quad \rho\in[0,1],\ \theta\in[0,2\pi],$$

o, lo que es lo mismo,

$$\bar{r}=\bar{\psi}(\rho,\theta)=\left\{\begin{matrix} 3\,\rho\,\cos\theta \\ (3/2)\,\rho\,\text{sen}\,\theta \\ 9\,\rho^2\,\cos^2\theta+(9/4)\,\rho^2\,\text{sen}^2\,\theta \end{matrix}\right\},\quad \text{con}\quad \rho\in[0,1],\ \theta\in[0,2\pi],$$

donde para cada valor del parámetro ρ se obtiene una curva coordenada cuya proyección sobre el plano horizontal es una elipse centrada en el origen con semieje mayor $a=3\,\rho$ y semieje menor $b=(3/2)\,\rho$ (orientados según los ejes X e Y respectivamente). De esta forma se consigue que la línea coordenada $\rho=1$ coincida exactamente con la curva C, por lo que efectivamente $C=\partial\Gamma$.
A partir de la parametrización anterior es posible obtener la diferencial de área $d\Gamma$ y el vector normal $\vec{n}$ en la forma

$$d\Gamma=|\vec{r}'_\rho\wedge\vec{r}'_\theta|\,d\rho\,d\theta,\qquad \text{y}\quad \vec{n}=\pm\frac{\vec{r}'_\rho\wedge\vec{r}'_\theta}{|\vec{r}'_\rho\wedge\vec{r}'_\theta|},$$

donde

$$\left.\begin{matrix} \vec{r}'_\rho=\left\{\begin{matrix} 3\,\cos\theta \\ (3/2)\,\text{sen}\,\theta \\ 18\,\rho\,\cos^2\theta+(9/2)\,\rho\,\text{sen}^2\,\theta \end{matrix}\right\} \\ \vec{r}'_\theta=\left\{\begin{matrix} -3\,\rho\,\text{sen}\,\theta \\ (3/2)\,\rho\,\cos\theta \\ -(27/2)\,\rho^2\,\text{sen}\,\theta\,\cos\theta \end{matrix}\right\} \end{matrix}\right\}\ \Rightarrow\ \vec{r}'_\rho\wedge\vec{r}'_\theta=\left[\vec{i}\ \ \vec{j}\ \ \vec{k}\right]\left\{\begin{matrix} -27\,\rho^2\,\cos\theta \\ -(27/2)\,\rho^2\,\text{sen}\,\theta \\ (9/2)\,\rho \end{matrix}\right\}.$$

En consecuencia,

$$d\Gamma=\sqrt{729\,\rho^4+\frac{81}{4}\,\rho^2}\ d\rho\,d\theta\qquad \text{y}\quad \bar{n}=\frac{1}{\sqrt{729\,\rho^4+\frac{81}{4}\,\rho^2}}\left\{\begin{matrix} -27\,\rho^2\,\cos\theta \\ -(27/2)\,\rho^2\,\text{sen}\,\theta \\ (9/2)\,\rho \end{matrix}\right\},$$

donde el signo de la normal se ha tomado positivo para que su sentido sea compatible con el sentido de la circulación adoptado previamente al variar θ entre 0 y 2π.
Para evaluar la integral de superficie es preciso calcular previamente el rotacional del campo $\vec{f}$ mediante la expresión

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\vec{f}\right)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix}=\left[\vec{i}\ \ \vec{j}\ \ \vec{k}\right]\ \overline{\text{rot}}\left(\vec{f}\right),\quad \text{con}\ \overline{\text{rot}}(\vec{f})=\left\{\begin{matrix} \dfrac{\partial f_z}{\partial y}-\dfrac{\partial f_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f_x}{\partial z}-\dfrac{\partial f_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f_y}{\partial x}-\dfrac{\partial f_x}{\partial y} \end{matrix}\right\}.$$

En este caso,

$$\bar{f}=\left\{\begin{matrix} y-z+9 \\ z-x-9 \\ x-y \end{matrix}\right\}\qquad\Longrightarrow\qquad \overline{\text{rot}}\left(\vec{f}\right)=\left\{\begin{matrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{matrix}\right\}.$$

Por ser constante el rotacional, al evaluarlo en la superficie Γ se obtiene este mismo valor. Finalmente,

$$\iint_\Gamma \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{f}\right) \cdot \vec{n}\, d\Gamma = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(54\,\rho^2\ \cos\theta + 27\,\rho^2\ \mathrm{sen}\,\theta - 9\,\rho\right)\ d\rho\, d\theta = -9\,\pi,$$

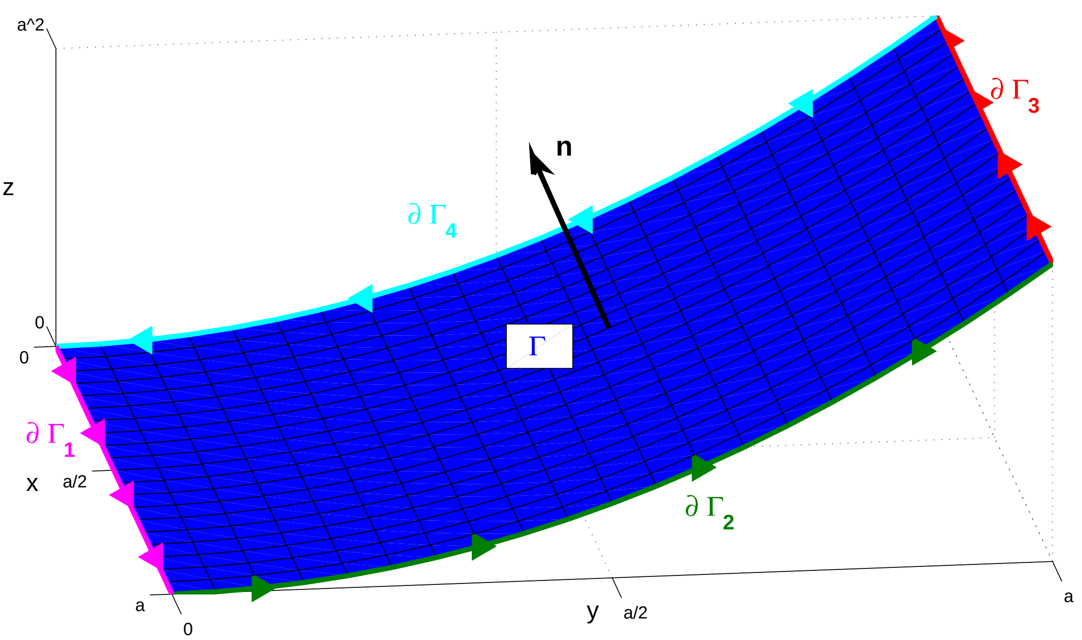
lo que confirma que el resultado obtenido mediante los dos procedimientos es el mismo.

8.– Sea el campo vectorial

$$\bar{f}(\bar{r}) = \begin{Bmatrix} \cos y + y\cos x \\ \mathrm{sen}\, x - x\,\mathrm{sen}\, y \\ x\,y\,z \end{Bmatrix}$$

en el domino $\Omega = \{(x,y,z) \mid x \in [0,a],\ y \in [0,a],\ z \in [0,y^2]\}$.
Verificar el Teorema de Stokes en la cara superior de $\partial\Omega$.

SOLUCIÓN:



Se debe verificar que

$$\oint_{\partial\Gamma} \vec{f} \cdot d\vec{r} = \iint_\Gamma \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{f}\right)\cdot \vec{n}\, d\Gamma,$$

donde Γ es la cara superior de $\partial\Omega$, definida mediante

$$\Gamma = \partial\Omega_{\mathrm{SUP}} = \left\{(x,y,z)\ \middle|\ z = y^2,\ x \in [0,a],\ y \in [0,a]\right\}.$$

En consecuencia, esta superficie puede parametrizarse en la forma (parametrización trivial)

$$\bar{r} = \bar{\psi}(u,v) = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ v^2 \end{Bmatrix} \quad \text{con} \quad u \in [0,a],\ v \in [0,a].$$

A partir de la parametrización anterior es posible obtener la diferencial de área $d\Gamma$ y el vector normal $\vec{n}$ en la forma

$$d\Gamma = |\vec{r}'_u \wedge \vec{r}'_v|\ d\rho\, d\theta, \qquad \text{y} \quad \vec{n} = \pm\frac{\vec{r}'_u \wedge \vec{r}'_v}{|\vec{r}'_u \wedge \vec{r}'_v|},$$

donde

$$\bar{r}'_u = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \bar{r}'_v = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2\,v \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \bar{r}'_u \wedge \bar{r}'_v = \begin{Bmatrix} 0 \\ -2\,v \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

En consecuencia,

$$d\Gamma = \sqrt{4\,v^2+1}\;du\,dv \qquad \text{y} \quad \bar{n} = \frac{1}{\sqrt{4\,v^2+1}} \begin{Bmatrix} 0 \\ -2\,v \\ 1 \end{Bmatrix},$$

donde el signo de la normal se ha tomado positivo para que su sentido sea compatible con el sentido de la circulación que se indica en la figura.
Para evaluar la integral de superficie es preciso calcular previamente el rotacional del campo $\vec{f}$ mediante la expresión

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{f}\right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{bmatrix} \overline{\mathrm{rot}}\left(\vec{f}\right), \quad \text{con} \quad \overline{\mathrm{rot}}(\vec{f}) = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial f_z}{\partial y} - \dfrac{\partial f_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f_x}{\partial z} - \dfrac{\partial f_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f_y}{\partial x} - \dfrac{\partial f_x}{\partial y} \end{Bmatrix}.$$

En este caso,

$$\bar{f} = \begin{Bmatrix} \cos y + y\,\cos x \\ \operatorname{sen} x - x\,\operatorname{sen} y \\ x\,y\,z \end{Bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \overline{\mathrm{rot}}\left(\vec{f}\right) = \begin{Bmatrix} x\,z \\ -y\,z \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Evaluando el rotacional en la superficie Γ se obtiene

$$\overline{\mathrm{rot}}\left(\vec{f}(\bar{r})\right)\Big|_{\bar{r}=\bar{\psi}(u,v)} = \begin{Bmatrix} u\,v^2 \\ -v^3 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

por lo que

$$\iint_\Gamma \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{f}\right)\cdot\vec{n}\,d\Gamma = \int_0^a\int_0^a \frac{2\,v^4}{\sqrt{4\,v^2+1}}\sqrt{4\,v^2+1}\,du\,dv = \frac{2}{5}a^6.$$

Para calcular la integral de línea, el contorno $\partial\Gamma$ se divide en los 4 tramos que lo componen, de forma que

$$\oint_{\partial\Gamma}\vec{f}\cdot d\vec{r} = \oint_{\partial\Gamma_1}\vec{f}\cdot d\vec{r} + \oint_{\partial\Gamma_2}\vec{f}\cdot d\vec{r} + \oint_{\partial\Gamma_3}\vec{f}\cdot d\vec{r} + \oint_{\partial\Gamma_4}\vec{f}\cdot d\vec{r}.$$

Para evaluar cada una de las cuatro integrales se parametrizan las correspondientes curvas:

$$\partial\Gamma_1: \quad \bar{r} = \bar{\alpha}_1(t) = \begin{Bmatrix} t\,a \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad d\bar{r} = \begin{Bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} dt, \quad t\in[0,1],$$

$$\partial\Gamma_2: \quad \bar{r} = \bar{\alpha}_2(t) = \begin{Bmatrix} a \\ t\,a \\ t^2\,a^2 \end{Bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad d\bar{r} = \begin{Bmatrix} 0 \\ a \\ 2\,t\,a^2 \end{Bmatrix} dt, \quad t\in[0,1],$$

$$\partial\Gamma_3: \quad \bar{r} = \bar{\alpha}_3(t) = \begin{Bmatrix} (1-t)\,a \\ a \\ a^2 \end{Bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad d\bar{r} = \begin{Bmatrix} -a \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} dt, \quad t\in[0,1],$$

$$\partial\Gamma_4: \quad \bar{r} = \bar{\alpha}_4(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ (1-t)\,a \\ (1-t)^2\,a^2 \end{Bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad d\bar{r} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -a \\ -2\,(1-t)\,a^2 \end{Bmatrix} dt, \quad t\in[0,1],$$

y se valora el producto escalar $\vec{f} \cdot d\vec{r}$ en cada una de ellas:

$$\left(\vec{f} \cdot d\vec{r}\right)\Big|_{\bar{r}=\alpha_1(t)} = a\, dt,$$
$$\left(\vec{f} \cdot d\vec{r}\right)\Big|_{\bar{r}=\alpha_2(t)} = \left(a \text{ sen}\, a - a^2 \text{ sen}(at) + 2\, a^6\, t^4\right)\, dt,$$
$$\left(\vec{f} \cdot d\vec{r}\right)\Big|_{\bar{r}=\alpha_3(t)} = \left(-a \cos a - a^2 \cos\left((1-t)\, a\right)\right)\, dt,$$
$$\left(\vec{f} \cdot d\vec{r}\right)\Big|_{\bar{r}=\alpha_4(t)} = 0\, dt.$$

En consecuencia,

$$\oint_{\Gamma_1} \vec{f}(\bar{r}) \cdot d\vec{r} = \int_0^1 a\, dt = a,$$
$$\oint_{\Gamma_2} \vec{f}(\bar{r}) \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \left(a \text{ sen}\, a - a^2 \text{ sen}(at) + 2\, a^6\, t^4\right)\, dt = a \text{ sen}\, a + a \cos a + \frac{2}{5} a^6 - a,$$
$$\oint_{\Gamma_3} \vec{f}(\bar{r}) \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \left(-a \cos a - a^2 \cos\left((1-t)\, a\right)\right)\, dt = -a \cos a - a \text{ sen}\, a,$$
$$\oint_{\Gamma_4} \vec{f}(\bar{r}) \cdot d\vec{r} = \int_0^1 0\, dt = 0,$$

Finalmente,

$$\oint_{\partial\Gamma} \vec{f} \cdot d\vec{r} = \oint_{\partial\Gamma_1} \vec{f} \cdot d\vec{r} + \oint_{\partial\Gamma_2} \vec{f} \cdot d\vec{r} + \oint_{\partial\Gamma_3} \vec{f} \cdot d\vec{r} + \oint_{\partial\Gamma_4} \vec{f} \cdot d\vec{r} = \frac{2}{5} a^6.$$

Por tanto, se verifica el Teorema de Stokes.

9.– Sea el campo vectorial

$$\bar{f}(\bar{r}) = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}$$

en el dominio $\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z,\ z \leq 4$.
Verficar el Teorema de la Divergencia en el dominio Ω.

SOLUCIÓN:

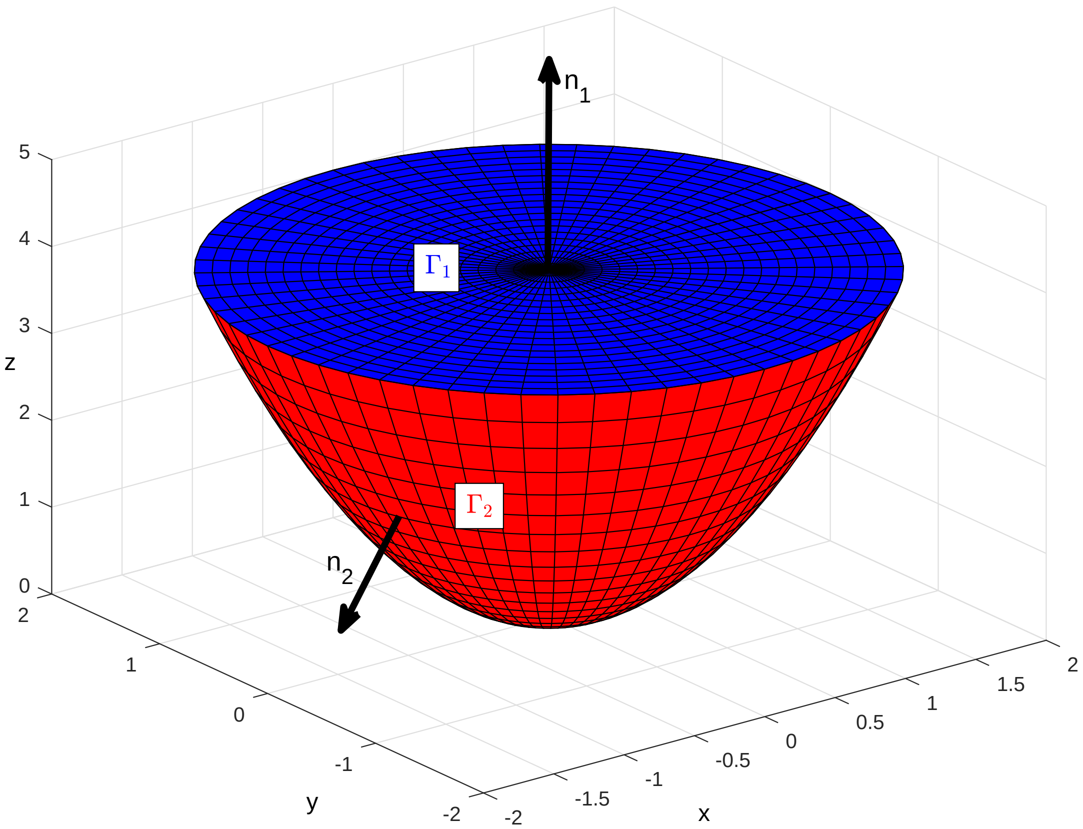
Se debe verificar que

$$\oiint_{\Gamma} \vec{f} \cdot \vec{n}\, d\Gamma = \iiint_{\Omega} \text{div}\left(\vec{f}\right)\, d\Omega,$$

donde $\Gamma = \partial\Omega$, y el dominio Ω es el recinto limitado superiormente por el plano $z = 4$ y lateral e inferiormente por el paraboloide de revolución $z = x^2 + y^2$.
La integral de superficie se divide en dos partes,

$$\oiint_{\Gamma} \vec{f} \cdot \vec{n}\, d\Gamma = \oiint_{\Gamma_1} \vec{f} \cdot \vec{n}_1\, d\Gamma_1 + \oiint_{\Gamma_2} \vec{f} \cdot \vec{n}_2\, d\Gamma_2,$$

donde Γ_1 es la tapa superior (es decir: el círculo de radio 2, centrado en el eje Z y situado en el plano horizontal $z = 4$), y Γ_2 es la superficie lateral, definida de forma explícita por la función $z = x^2 + y^2$ para valores de x e y tales que $z \leq 4$.



En consecuencia, las superficies Γ_1 y Γ_2 pueden parametrizarse en la forma

$$\left.\begin{array}{l} \bar{r} = \bar{\psi}_1(\rho,\theta) = \begin{Bmatrix} \rho\,\cos\theta \\ \rho\,\operatorname{sen}\theta \\ 4 \end{Bmatrix} \\[2ex] \bar{r} = \bar{\psi}_2(\rho,\theta) = \begin{Bmatrix} \rho\,\cos\theta \\ \rho\,\operatorname{sen}\theta \\ \rho^2 \end{Bmatrix} \end{array}\right\} \quad \text{con} \quad \rho \in [0,2],\ \theta \in [0,2\pi].$$

A partir de las parametrizaciones anteriores es posible obtener las correspondientes diferenciales de área $d\Gamma_1$ y $d\Gamma_2$, así como los vectores normales $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$ en la forma

$$d\Gamma = |\vec{r}\,'_\rho \wedge \vec{r}\,'_\theta|\, d\rho\, d\theta, \qquad \text{y} \quad \vec{n} = \pm\frac{\vec{r}\,'_\rho \wedge \vec{r}\,'_\theta}{|\vec{r}\,'_\rho \wedge \vec{r}\,'_\theta|}.$$

En el caso de Γ_1

$$\bar{r}'_\rho = \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \bar{r}'_\theta = \begin{Bmatrix} -\rho\,\operatorname{sen}\theta \\ \rho\,\cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{r}\,'_\rho \wedge \vec{r}\,'_\theta = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho \end{Bmatrix},$$

y en el caso de Γ_2

$$\bar{r}'_\rho = \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \\ 2\rho \end{Bmatrix}, \quad \bar{r}'_\theta = \begin{Bmatrix} -\rho\,\operatorname{sen}\theta \\ \rho\,\cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{r}\,'_\rho \wedge \vec{r}\,'_\theta = \begin{Bmatrix} -2\,\rho^2\,\cos\theta \\ -2\,\rho^2\,\operatorname{sen}\theta \\ \rho \end{Bmatrix}.$$

En consecuencia,

$$d\Gamma_1 = \rho \;\; d\rho\, d\theta, \qquad \bar{n}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix},$$

donde el signo de la normal se ha tomado positivo para que su sentido apunte hacia el exterior de Ω, y

$$d\Gamma_2 = \sqrt{4\rho^4 + \rho^2} \;\; d\rho\, d\theta, \qquad \bar{n}_2 = -\frac{1}{\sqrt{4\rho^4+\rho^2}} \begin{Bmatrix} -2\,\rho^2\, \cos\theta \\ -2\,\rho^2\, \operatorname{sen}\theta \\ \rho \end{Bmatrix},$$

donde el signo de la normal se ha tomado negativo para que su sentido apunte hacia el exterior de Ω. Valorando el campo $\vec{f}$ en Γ_1 y en Γ_2 se obtiene

$$\vec{f}\,\bigg|_{\bar{r}=\bar{\psi}_1(\rho,\theta)} = \begin{Bmatrix} \rho\, \cos\theta \\ \rho\, \operatorname{sen}\theta \\ 4 \end{Bmatrix}, \qquad \vec{f}\,\bigg|_{\bar{r}=\bar{\psi}_2(\rho,\theta)} = \begin{Bmatrix} \rho\, \cos\theta \\ \rho\, \operatorname{sen}\theta \\ \rho^2 \end{Bmatrix},$$

Por tanto,

$$\oiint_{\Gamma_1} \vec{f}\cdot\vec{n}_1\, d\Gamma_1 = \int_0^{2\pi}\int_0^2 4\,\rho\, d\rho\, d\theta = 16\,\pi, \qquad \oiint_{\Gamma_2} \vec{f}\cdot\vec{n}_2\, d\Gamma_2 = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \rho^3\, d\rho\, d\theta = 8\,\pi,$$

por lo que, finalmente,

$$\oiint_{\Gamma} \vec{f}\cdot\vec{n}\, d\Gamma = 24\,\pi.$$

Para evaluar la integral de volumen es preciso calcular previamente la divergencia del campo $\vec{f}$ mediante la expresión

$$\operatorname{div}\left(\vec{f}\right) = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}.$$

En este caso,

$$\bar{f} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \operatorname{div}\left(\vec{f}\right) = 3.$$

Finalmente, planteando la integral en coordenadas cilíndricas,

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div}\left(\vec{f}\right)\; d\Omega = \int_0^2\int_0^{2\pi}\int_{\rho^2}^4 3\,\rho\, dz\, d\theta\, d\rho = 24\,\pi$$

Por tanto, se verifica el Teorema de la Divergencia.

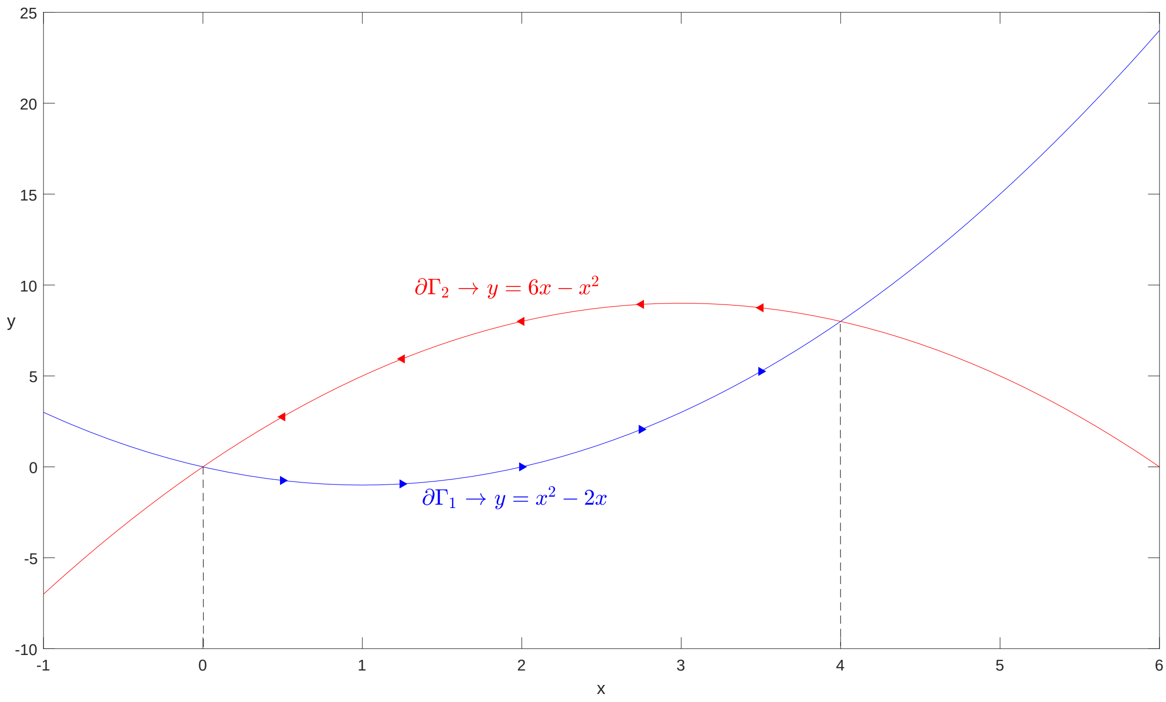
10.– Sea Γ la superficie plana comprendida entre las parábolas $y = 6x - x^2$ e $y = x^2 - 2x$. Se pide:

- **a)** Calcular el área de Γ integrando directamente.
- **b)** Calcular el área de Γ aplicando el Teorema de Green.
- **c)** Calcular el centro de gravedad de Γ integrando directamente.
- **d)** Calcular el centro de gravedad de Γ aplicando el Teorema de Green.

SOLUCIÓN:

a) Calcular el área de Γ integrando directamente.

$$A = \iint_{\Gamma} dA = \int_{x=0}^{x=4}\left(\int_{y=x^2-2x}^{y=6x-x^2} dy\right) dx = \frac{64}{3}.$$



b) Calcular el área de Γ aplicando el Teorema de Green.

Aplicando el Teorema de Green a las funciones $p(x, y) = -y$, $q(x, y) = x$, se obtiene la siguiente expresión para el cálculo del área.

$$A = \iint_{\Gamma} d\Gamma = \frac{1}{2} \oint_{\partial\Gamma} (-y\,dx + x\,dy)\,.$$

Para calcular la integral de línea, el contorno $\partial\Gamma$ se divide en los 2 tramos que lo componen, de forma que

$$\oint_{\partial\Gamma} (-y\,dx + x\,dy) = \oint_{\partial\Gamma_1} (-y\,dx + x\,dy) + \oint_{\partial\Gamma_2} (-y\,dx + x\,dy)\,.$$

Para evaluar estas dos integrales se explicitan las correspondientes curvas:

$$\begin{aligned} \partial\Gamma_1 : &\qquad y = x^2 - 2\,x \quad \Longrightarrow \quad dy = (2\,x - 2)\,dx,\\ \partial\Gamma_2 : &\qquad y = 6\,x - x^2 \quad \Longrightarrow \quad dy = (6 - 2\,x)\,dx, \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Gamma_1} (-y\,dx + x\,dy) &= \oint_{\partial\Gamma_1} -y\,dx \qquad + \oint_{\partial\Gamma_1} x\,dy\\ &= \int_0^4 -\left(x^2 - 2\,x\right)\,dx + \int_0^4 x\,\left(2\,x - 2\right)\,dx = \int_0^4 x^2\,dx = \frac{64}{3},\\ \oint_{\partial\Gamma_2} (-y\,dx + x\,dy) &= \oint_{\partial\Gamma_2} -y\,dx \qquad + \oint_{\partial\Gamma_2} x\,dy\\ &= \int_4^0 -\left(6\,x - x^2\right)\,dx + \int_4^0 x\,\left(6 - 2\,x\right)\,dx = \int_4^0 -x^2\,dx = \frac{64}{3}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\oint_{\partial\Gamma} (-y\,dx + x\,dy) = \frac{64}{3} + \frac{64}{3} \qquad \Longrightarrow \qquad A = \frac{1}{2} \oint_{\partial\Gamma} (-y\,dx + x\,dy) = \frac{64}{3}.$$

Se comprueba que el valor obtenido aplicando el Teorema de Green es igual al calculado previamente por integración directa.

c) Calcular el centro de gravedad de Γ integrando directamente.

Por definición de las coordenadas (x_G, y_G) del centro de gravedad,

$$x_G = \frac{1}{A}\iint_\Gamma x\,d\Gamma = \frac{3}{64}\int_0^4\int_{x^2-2x}^{6x-x^2} x\,dy\,dx = 2,$$
$$y_G = \frac{1}{A}\iint_\Gamma y\,d\Gamma = \frac{3}{64}\int_0^4\int_{x^2-2x}^{6x-x^2} y\,dy\,dx = 4.$$

d) Calcular el centro de gravedad de Γ aplicando el Teorema de Green.

Aplicando el Teorema de Green a las funciones $p(x,y) = -x\,y$, $q(x,y) = x^2/2$, se obtiene

$$\iint_\Gamma x\,d\Gamma = \frac{1}{2}\oint_{\partial\Gamma}\left(-x\,y\,dx + \frac{x^2}{2}\,dy\right),$$

Y aplicando nuevamente el Teorema de Green a las funciones $p(x,y) = -y^2/2$, $q(x,y) = x\,y$, se obtiene

$$\iint_\Gamma y\,d\Gamma = \frac{1}{2}\oint_{\partial\Gamma}\left(-\frac{y^2}{2}\,dx + x\,y\,dy\right).$$

Para calcular las integrales de línea, el contorno $\partial\Gamma$ se divide en los 2 tramos que lo componen, de forma que

$$\oint_{\partial\Gamma}\left(-x\,y\,dx + \frac{x^2}{2}\,dy\right) = \oint_{\partial\Gamma_1}\left(-x\,y\,dx + \frac{x^2}{2}\,dy\right) + \oint_{\partial\Gamma_2}\left(-x\,y\,dx + \frac{x^2}{2}\,dy\right),$$

y

$$\oint_{\partial\Gamma}\left(-\frac{y^2}{2}\,dx + x\,y\,dy\right) = \oint_{\partial\Gamma_1}\left(-\frac{y^2}{2}\,dx + x\,y\,dy\right) + \oint_{\partial\Gamma_2}\left(-\frac{y^2}{2}\,dx + x\,y\,dy\right).$$

Procediendo como en el apartado b se obtiene

$$\oint_{\partial\Gamma_1}\left(-x\,y\,dx + \frac{x^2}{2}\,dy\right) = \int_0^4 -x\,\left(x^2 - 2\,x\right)\,dx + \int_0^4 \frac{x^2}{2}\,(2\,x - 2)\,dx = \frac{64}{3},$$
$$\oint_{\partial\Gamma_2}\left(-x\,y\,dx + \frac{x^2}{2}\,dy\right) = \int_4^0 -x\,\left(6\,x - x^2\right)\,dx + \int_4^0 \frac{x^2}{2}\,(6 - 2\,x)\,dx = 64,$$

y

$$\oint_{\partial\Gamma_1}\left(-\frac{y^2}{2}\,dx + x\,y\,dy\right) = \int_0^4 -\frac{\left(x^2 - 2\,x\right)^2}{2}\,dx + \int_0^4 x\,\left(x^2 - 2\,x\right)\,(2\,x - 2)\,dx = \frac{1408}{15},$$
$$\oint_{\partial\Gamma_2}\left(-\frac{y^2}{2}\,dx + x\,y\,dy\right) = \int_4^0 -\frac{\left(6\,x - x^2\right)^2}{2}\,dx + \int_4^0 x\,\left(6\,x - x^2\right)\,(6 - 2\,x)\,dx = \frac{384}{5}.$$

Por tanto,

$$\oint_{\partial\Gamma}\left(-x\,y\,dx + \frac{x^2}{2}\,dy\right) = \frac{64}{3} + 64 = \frac{256}{3} \quad\Rightarrow\quad x_G = \frac{1}{A}\,\frac{1}{2}\oint_{\partial\Gamma}\left(-x\,y\,dx + \frac{x^2}{2}\,dy\right) = 2,$$

y

$$\oint_{\partial\Gamma}\left(-\frac{y^2}{2}\,dx + x\,y\,dy\right) = \frac{1408}{15} + \frac{384}{5} = \frac{2560}{15} \quad\Rightarrow\quad x_G = \frac{1}{A}\,\frac{1}{2}\oint_{\partial\Gamma}\left(-x\,y\,dx + \frac{x^2}{2}\,dy\right) = 4.$$

Se comprueba que el valor obtenido aplicando el Teorema de Green es igual al calculado previamente por integración directa.