1.– Se denomina helicoide a la superficie obtenida al desplazarse una recta contenida en el eje OX con velocidad constante no nula a lo largo del eje OZ a la vez que gira con velocidad angular constante, también no nula. Se pide:

a) Obtener una parametrización del helicoide.
b) Calcular la primera forma cuadrática fundamental.
c) Calcular la segunda forma cuadrática fundamental.

SOLUCIÓN:

a) Obtener una parametrización del helicoide.

$$\begin{cases} x = u\,\cos(w\,t) \\ y = u\,\sin(w\,t) \\ z = bt \end{cases}$$

Introduciendo $v = \; w\,t$ y $a = b/w$

$$\begin{cases} x = u\,\cos(v) \\ y = u\,\sin(v) \\ z = a\,v \end{cases}$$

Luego,

$$\boxed{\bar{r} = \bar{\psi}(\bar{u}) = \begin{Bmatrix} u\,\cos(v) \\ u\,\sin(v) \\ a\,v \end{Bmatrix}}$$

b) Calcular la primera forma cuadrática fundamental.

$$\mathrm{I} = E\,(du)^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,(dv)^2,$$

donde

$$\begin{aligned} E &= \bar{r}'_u \cdot \bar{r}'_u \\ F &= \bar{r}'_u \cdot \bar{r}'_v \\ G &= \bar{r}'_v \cdot \bar{r}'_v. \end{aligned}$$

Luego es preciso calcular previamente

$$\bar{r}'_u = \begin{Bmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \bar{r}'_v = \begin{Bmatrix} -u\,\sin(v) \\ u\,\cos(v) \\ a \end{Bmatrix},$$

para obtener

$$E = \; 1, \quad F = \; 0, \quad G = \; u^2 + a^2.$$

Por tanto,

$$\boxed{\mathrm{I} = (du)^2 + (u^2 + a^2)\,(dv)^2}$$

c) Calcular la segunda forma cuadrática fundamental.

$$\mathrm{II} = e\,(du)^2 + 2\,f\,du\,dv + g\,(dv)^2,$$

donde

$$\begin{aligned} e &= \bar{r}''_{uu}\cdot\bar{N} \\ f &= \bar{r}''_{uv}\cdot\bar{N} \\ g &= \bar{r}''_{vv}\cdot\bar{N}, \end{aligned}$$

siendo

$$\bar{N} = \frac{\bar{r}'_u \wedge \bar{r}'_v}{|\bar{r}'_u \wedge \bar{r}'_v|}.$$

Previamente han sido calculados $\bar{r}'_u$ y $\bar{r}'_v$ y por tanto la normal resulta

$$\bar{N} = \frac{1}{\sqrt{a^2+u^2}} \begin{Bmatrix} a\,\sin(v) \\ -a\,\cos(v) \\ u \end{Bmatrix}.$$

Ahora es preciso calcular $\bar{r}''_{uu}$, $\bar{r}''_{uv}$ y $\bar{r}''_{vv}$.

$$\bar{r}''_{uu} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \bar{r}''_{uv} = \begin{Bmatrix} -\sin(v) \\ \cos(v) \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \bar{r}''_{vv} = \begin{Bmatrix} -u\,\cos(v) \\ -u\,\sin(v) \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Por tanto,

$$e = 0, \quad f = \frac{-a}{\sqrt{a^2+u^2}}, \quad g = 0.$$

Finalmente,

$$\boxed{\mathrm{II} = \frac{-2a}{\sqrt{a^2+u^2}}\,du\,dv}$$

2.– Considérese el toro $x = \cos(u)\big(b + a\,\cos(v)\big)$, $y = \sin(u)\big(b + a\,\cos(v)\big)$, $z = a\,\sin(v)$ donde $u \in [0, 2\pi]$ y $v \in [0, 2\pi]$. Se pide:

a) Calcular la primera forma cuadrática fundamental.
b) Calcular el área de la superficie.
c) Calcular la segunda forma cuadrática fundamental.

SOLUCIÓN:

a) Calcular la primera forma cuadrática fundamental.

$$\bar{r} = \bar{\psi}(\bar{u}) = \begin{Bmatrix} \cos(u)\big(b + a\,\cos(v)\big) \\ \sin(u)\big(b + a\,\cos(v)\big) \\ a\,\sin(v) \end{Bmatrix}$$

$$\mathrm{I} = E\,(du)^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,(dv)^2,$$

donde

$$\begin{aligned} E &= \bar{r}'_u\cdot\bar{r}'_u, \\ F &= \bar{r}'_u\cdot\bar{r}'_v, \\ G &= \bar{r}'_v\cdot\bar{r}'_v. \end{aligned}$$

Luego, previamente es preciso calcular

$$\bar{r}'_u = \begin{Bmatrix} -\sin(u)\big(b + a\,\cos(v)\big) \\ \cos(u)\big(b + a\,\cos(v)\big) \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \bar{r}'_v = \begin{Bmatrix} -a\,\cos(u)\,\sin(v) \\ -a\,\sin(u)\,\sin(v) \\ a\,\cos(v) \end{Bmatrix}.$$

Y finalmente se obtiene,

$$\left.\begin{array}{l} E = \big(b + a\,\cos(v)\big)^2 \\ F = 0 \\ G = a^2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\mathrm{I} = \big(b + a\,\cos(v)\big)^2\,(du)^2 + a^2\,(dv)^2}$$

b) Calcular el área de la superficie.

Calculamos la diferencial de área

$$dA = \sqrt{E\,G - F^2}\;\,du\,dv = a\big(b + a\,\cos(v)\big)\,du\,dv.$$

Integrando la expresión anterior en el dominio del toro se obtiene

$$A = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} a\big(b + a\,\cos(v)\big)\,du\,dv = 4\pi^2 a\,b.$$

c) Calcular la segunda forma cuadrática fundamental.

$$\mathrm{II} = e\,(du)^2 + 2\,f\,du\,dv + g\,(dv)^2,$$

donde

$$\begin{aligned} e &= \bar{r}''_{uu}\cdot\bar{N}, \\ f &= \bar{r}''_{uv}\cdot\bar{N}, \\ g &= \bar{r}''_{vv}\cdot\bar{N}, \end{aligned}$$

y

$$\bar{N} = \frac{\bar{r}'_u \wedge \bar{r}'_v}{|\bar{r}'_u \wedge \bar{r}'_v|}.$$

Luego, previamente es preciso calcular

$$\bar{r}''_{uu} = \left\{\begin{array}{c} -\cos(u)\big(b + a\,\cos(v)\big) \\ -\sin(u)\big(b + a\,\cos(v)\big) \\ 0 \end{array}\right\}, \qquad \bar{r}''_{uv} = \left\{\begin{array}{c} a\,\sin(u)\,\sin(v) \\ -a\,\cos(u)\,\sin(v) \\ 0 \end{array}\right\},$$

$$\bar{r}''_{vv} = \left\{\begin{array}{c} -a\,\cos(u)\,\cos(v) \\ -a\,\sin(u)\,\cos(v) \\ -a\,\sin(v) \end{array}\right\}, \qquad \bar{N} = \left\{\begin{array}{c} \cos(u)\,\cos(v) \\ \sin(u)\,\cos(v) \\ \sin(v) \end{array}\right\}.$$

Y finalmente se obtiene,

$$\left.\begin{array}{lcl} e &=& -\cos(v)\big(b + a\,\cos(v)\big) \\ f &=& 0 \\ g &=& -a \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\mathrm{II} = -\cos(v)\big(b + a\,\cos(v)\big)\,(du)^2 - a\,(dv)^2}$$

3.– Dado el cono $x = u\cos(v)$, $y = u\sin(v)$ y $z = u$. Calcular la longitud de la curva que verifique sobre la superficie $u = e^{\lambda t}$ y $v = t$ entre $0 \le t \le \pi$.

SOLUCIÓN:

$$\bar{r} = \bar{\psi}(\bar{u}) = \begin{Bmatrix} u\cos(v) \\ u\sin(v) \\ u \end{Bmatrix}.$$

$$\mathrm{I} = (ds)^2 = E\,(du)^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,(dv)^2,$$

donde

$$\begin{aligned} E &= \bar{r}'_u \cdot \bar{r}'_u \\ F &= \bar{r}'_u \cdot \bar{r}'_v \\ G &= \bar{r}'_v \cdot \bar{r}'_v. \end{aligned}$$

Donde es preciso calcular

$$\bar{r}'_u = \begin{Bmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \bar{r}'_v = \begin{Bmatrix} -u\,\sin(v) \\ u\,\cos(v) \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} E &= 2 \\ F &= 0 \qquad \Longrightarrow \quad (ds)^2 = 2\,(du)^2 + u^2\,(dv)^2. \\ G &= u^2 \end{aligned}$$

La curva de interés está contenida en la superficie y verifica

$$\begin{aligned} u &= e^{\lambda t} \quad \Longrightarrow \quad du = \lambda\, e^{\lambda t} dt \\ v &= t \quad \Longrightarrow \quad dv = dt. \end{aligned}$$

Particularizando en la curva de interés

$$(ds)^2 = 2\left(\lambda\, e^{\lambda t} dt\right)^2 + \left(e^{\lambda t}\right)^2 (dt)^2 = e^{2\lambda t}(2\lambda^2 + 1)(dt)^2.$$

Por tanto,

$$(ds) = e^{\lambda t}\sqrt{2\lambda^2 + 1}\,dt.$$

Finalmente integrando

$$s = \int_0^{\pi} e^{\lambda t}\sqrt{2\lambda^2 + 1}\,dt = \frac{e^{\lambda\pi} - 1}{\lambda}\sqrt{2\lambda^2 + 1}.$$

4.– Hallar el ángulo que forman las direcciones asintóticas de la superficie $z = \ln\cos y - \ln\cos x$.

SOLUCIÓN:

$$\bar{r} = \bar{\psi}(\bar{u}) = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \ln\cos v - \ln\cos u \end{Bmatrix}.$$

Las direcciones asintóticas verifican $k_n = \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}} = 0$. Por tanto, en toda dirección asintótica se cumple:

$$\mathrm{II} = e\,(du)^2 + 2\,f\,du\,dv + g\,(dv)^2 = 0.$$

Para el cálculo de la segunda forma fundamental es preciso calcular previamente:

$$\bar{r}'_u = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ \tan(u) \end{Bmatrix}, \quad \bar{r}'_v = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\tan(v) \end{Bmatrix},$$

$$\bar{r}''_{uu} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{1}{\cos^2(u)} \end{Bmatrix}, \quad \bar{r}''_{uv} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \bar{r}''_{vv} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{-1}{\cos^2(v)} \end{Bmatrix}$$

De donde se obtiene

$$\bar{N} = \frac{\bar{r}'_u \wedge \bar{r}'_v}{|\bar{r}'_u \wedge \bar{r}'_v|} = \frac{1}{\sqrt{\tan^2(u) + \tan^2(v) + 1}} \begin{Bmatrix} -\tan(u) \\ \tan(v) \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} e &= \bar{r}''_{uu} \cdot \bar{N} = \frac{1}{\sqrt{\tan^2(u) + \tan^2(v) + 1}} \frac{1}{\cos^2(u)} \\ f &= \bar{r}''_{uv} \cdot \bar{N} = 0 \\ g &= \bar{r}''_{vv} \cdot \bar{N} = \frac{1}{\sqrt{\tan^2(u) + \tan^2(v) + 1}} \frac{-1}{\cos^2(v)}. \end{aligned}$$

Por tanto las direcciones asintóticas deben verificar:

$$\mathrm{II} = e\,(du)^2 + 2\,f\,du\,dv + g\,(dv)^2 = \frac{1}{\sqrt{\tan^2(u) + \tan^2(v) + 1}} \left(\frac{(du)^2}{\cos^2(u)} - \frac{(dv)^2}{\cos^2(v)} \right) = 0.$$

Definiendo $\lambda = \dfrac{dv}{du}$ se puede expresar la ecuación anterior como

$$\frac{1}{\sqrt{\tan^2(u) + \tan^2(v) + 1}} \left(\frac{1}{\cos^2(u)} - \frac{\lambda^2}{\cos^2(v)} \right) = 0.$$

Resolviendo se obtiene

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\cos(v)}{\cos(u)} \\ \lambda_2 &= -\frac{\cos(v)}{\cos(u)}. \end{aligned}$$

A continuación se calcula el ángulo que forman las direcciones asintóticas

$$\cos(\alpha) = \frac{(d\bar{u}_1)^T \underset{\sim}{G}\, d\bar{u}_2}{\sqrt{(d\bar{u}_1)^T \underset{\sim}{G}\, d\bar{u}_1} \sqrt{(d\bar{u}_2)^T \underset{\sim}{G}\, d\bar{u}_2}}, \quad \text{con} \quad \begin{cases} d\bar{u}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{Bmatrix} du_1 \\ d\bar{u}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{Bmatrix} du_2 \end{cases}$$

Luego

$$\cos(\alpha) = \frac{(1 \;\; \lambda_1) \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{Bmatrix}}{\sqrt{(1 \;\; \lambda_1) \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{Bmatrix}} \sqrt{(1 \;\; \lambda_2) \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{Bmatrix}}},$$

donde

$$\begin{aligned} E &= \bar{r}'_u \cdot \bar{r}'_u = \frac{1}{\cos^2(u)} \\ F &= \bar{r}'_u \cdot \bar{r}'_v = -\tan(u)\,\tan(v) \\ G &= \bar{r}'_v \cdot \bar{r}'_v = \frac{1}{\cos^2(v)}. \end{aligned}$$

Calculamos primero el numerador:

$$(1\ \ \lambda_1)\begin{bmatrix} E\,F \\ F\,G \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\cos(v)}{\cos(u)} \end{pmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{1}{\cos^2(u)} & -\tan(u)\,\tan(v) \\ -\tan(u)\,\tan(v) & \dfrac{1}{\cos^2(v)} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ -\dfrac{\cos(v)}{\cos(u)} \end{Bmatrix} = 0.$$

Por tanto,

$$\cos(\alpha) = 0 \implies \boxed{\alpha = \frac{\pi}{2}}.$$

5.– Dada la superficie definida $z = (y^2 - x)^2$. Probar que el lugar geométrico de los puntos parabólicos de la superficie es una línea asintótica.

SOLUCIÓN:

$$\bar{r} = \bar{\psi}(\bar{u}) = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ (v^2-u)^2 \end{Bmatrix}.$$

Los puntos parabólicos verifican : $e\,g - f^2 = 0$. Luego es preciso calcular previamente:

$$\bar{r}'_u = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2(v^2-u) \end{Bmatrix}, \quad \bar{r}'_v = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4v(v^2-u) \end{Bmatrix}.$$

De donde se obtiene

$$\bar{N} = \frac{\bar{r}'_u \wedge \bar{r}'_v}{|\bar{r}'_u \wedge \bar{r}'_v|} = \frac{1}{\sqrt{(v^2-u)^2(4+16v^2)+1}}\begin{Bmatrix} 2(v^2-u) \\ -4v(v^2-u) \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

Además,

$$\bar{r}''_{uu} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{Bmatrix}, \quad \bar{r}''_{uv} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4v \end{Bmatrix}, \quad \bar{r}''_{vv} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 12v^2-4u \end{Bmatrix}.$$

Resultando,

$$\begin{aligned} e &= \bar{r}''_{uu}\cdot\bar{N} = \frac{2}{\sqrt{(v^2-u)^2(4+16v^2)+1}} \\ f &= \bar{r}''_{uv}\cdot\bar{N} = \frac{-4v}{\sqrt{(v^2-u)^2(4+16v^2)+1}} \\ g &= \bar{r}''_{vv}\cdot\bar{N} = \frac{12v^2-4u}{\sqrt{(v^2-u)^2(4+16v^2)+1}}. \end{aligned}$$

Por tanto, los puntos parabólicos verifican:

$$e\,g - f^2 = \frac{2(12v^2-4u)-16v^2}{\sqrt{(v^2-u)^2(4+16v^2)+1}} = 0 \implies \begin{cases} u = v^2 \\ du = 2v\,dv \end{cases}$$

Una dirección asintótica verifica que $\mathrm{II} = 0$. Calculamos II

$$\mathrm{II} = e\,(du)^2 + 2\,f\,du\,dv + g\,(dv)^2 = \frac{2\,(du)^2 - 8v\,du\,dv + (12v^2-4u)\,(dv)^2}{\sqrt{(v^2-u)^2(4+16v^2)+1}}.$$

Finalmente, introducimos a la ecuación anterior la relación anteriormente obtenida que verifica el lugar geométrico de puntos parabólicos ($u = v^2$ y $du = 2v\,dv$)

$$\mathrm{II} = 2\,(2v\,dv)^2 - 8v\,2v\,dv\,dv + (12v^2 - 4v^2)\,(dv)^2 = 0.$$

Por tanto, se verifican que el lugar geométrico de los puntos parabólicos de la superficie es una línea asintótica.

6.– Hallar el ángulo que forman las curvas de las familias dadas por $dr^2 - (r^2 + a^2)d\theta^2 = 0$ sobre el helicoide definido mediante $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ y $z = a\theta + b$.

SOLUCIÓN:

$$\bar{r} = \bar{\psi}(\bar{u}) = \begin{Bmatrix} r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \\ a\theta + b \end{Bmatrix} \quad \text{con } \bar{u} = \begin{Bmatrix} r \\ \theta \end{Bmatrix}.$$

A continuación se calculan las direcciones de las familias de curvas

$$dr^2 - (r^2 + a^2)d\theta^2 = 0 \implies \frac{d\theta^2}{dr^2} = \frac{1}{r^2 + a^2},$$

introduciendo que $\lambda = \dfrac{d\theta}{dr}$ y resolviendo se obtiene

$$\lambda_1 = \frac{-1}{\sqrt{r^2 + a^2}}$$
$$\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2}}.$$

Para calcular el ángulo que forman las direcciones anteriores necesitamos calcular primero $\underset{\sim}{G}$ en la superficie

$$\bar{r}'_r = \begin{Bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \bar{r}'_\theta = \begin{Bmatrix} -r\,\sin(\theta) \\ r\,\cos(\theta) \\ a \end{Bmatrix}.$$

$$E = \bar{r}'_r \cdot \bar{r}'_r = 1$$
$$F = \bar{r}'_r \cdot \bar{r}'_\theta = 0$$
$$G = \bar{r}'_\theta \cdot \bar{r}'_\theta = r^2 + a^2.$$

Luego

$$\cos(\alpha) = \frac{(1 \;\; \lambda_1)\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{Bmatrix}}{\sqrt{(1 \;\; \lambda_1)\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{Bmatrix}}\sqrt{(1 \;\; \lambda_2)\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{Bmatrix}}},$$

Calculamos primero el numerador:

$$(1 \;\; \lambda_1)\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{-1}{\sqrt{r^2 + a^2}} \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 + a^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{r^2 + a^2}} \end{Bmatrix} = 0.$$

Por tanto,

$$\cos(\alpha) = 0 \implies \boxed{\alpha = \frac{\pi}{2}}$$

7.– Consideremos la superficie definida por $x = \cos u \cos v$, $y = \cos u \sin v$ y $z = \sin u$ y la familia de curvas paramétricas con $u = cte$. Hallar la ecuación de la curva que corta a las curvas de la familia anterior bajo un ángulo de $\pi/6$ y que pasa por el punto $(1, 0, 0)$.

SOLUCIÓN:

$$\bar{r} = \bar{\psi}(\bar{u}) = \begin{Bmatrix} \cos(u)\cos(v) \\ \cos(u)\sin(v) \\ \sin(u) \end{Bmatrix}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{(du_1 \;\; dv_1)\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} du_2 \\ dv_2 \end{Bmatrix}}{\sqrt{(du_1 \;\; dv_1)\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} du_1 \\ dv_1 \end{Bmatrix}}\sqrt{(du_2 \;\; dv_2)\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} du_2 \\ dv_2 \end{Bmatrix}}},$$

donde el ángulo $\alpha = \pi/6$ y $u_1 = cte \implies du_1 = 0$. Siendo necesario calcular

$$\bar{r}'_u = \begin{Bmatrix} -\sin(u)\cos(v) \\ -\sin(u)\sin(v) \\ \cos(u) \end{Bmatrix}, \quad \bar{r}'_v = \begin{Bmatrix} -\cos(u)\sin(v) \\ \cos(u)\cos(v) \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

$$E = \bar{r}'_u \cdot \bar{r}'_u = 1$$
$$F = \bar{r}'_u \cdot \bar{r}'_v = 0$$
$$G = \bar{r}'_v \cdot \bar{r}'_v = \cos^2(u).$$

Por tanto,

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{(0 \quad dv_1)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2(u) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} du_2 \\ dv_2 \end{Bmatrix}}{\sqrt{(0 \;\; dv_1)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2(u) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ dv_1 \end{Bmatrix}}\sqrt{(du_2 \;\; dv_2)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2(u) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} du_2 \\ dv_2 \end{Bmatrix}}}.$$

Operando,

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\cos^2(u)\, dv_1\, dv_2}{\sqrt{\cos^2(u)\,(dv_1)^2}\sqrt{(du_2)^2 + \cos^2(u)\,(dv_2)^2}} = \frac{\cos(u)\, dv_2}{\sqrt{(du_2)^2 + \cos^2(u)\,(dv_2)^2}}.$$

Elevando la ecuación anterior al cuadrado y operando se obtiene

$$\frac{3}{\cos^2(u)}(du_2)^2 = (dv_2)^2.$$

Dado que estamos calculando el ángulo en un punto se verifica que $u = u_1 = u_2$ y $v = v_1 = v_2$. Por tanto,

$$\pm\frac{\sqrt{3}}{\cos(u)}(du) = (dv).$$

Integrando,

$$v = \pm\sqrt{3}\ln\left(\sec(u) + \tan(u)\right) + c$$

donde la constante c se obtiene imponiendo que pasa por el punto $\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$. Por tanto $c = 0$. Una curva $r = \bar{\alpha}(u)$ que verifica el ángulo impuesto es,

$$r = \bar{\alpha}_(u) = \left\{ \begin{array}{c} \cos(u)\cos\left(\sqrt{3}\ln(\sec(u)+\tan(u))\right) \\ \cos(u)\sin\left(\sqrt{3}\ln(\sec(u)+\tan(u))\right) \\ \sin(u) \end{array} \right\}.$$

8.– Considérese la superficie $x = u$, $y = v$, $z = \frac{u^3}{3} - \frac{v^2}{2}$. Se pide:

a) Clasificar sus puntos.
b) Hallar las líneas de máxima pendiente.
c) Hallar las ecuaciones de las líneas asintóticas.

SOLUCIÓN:

a) Clasificar sus puntos.

$$\bar{r} = \bar{\psi}(\bar{u}) = \left\{ \begin{array}{c} u \\ v \\ \frac{u^3}{3} - \frac{v^2}{2} \end{array} \right\}.$$

La clasificación de puntos de una superficie es:

$$\begin{aligned} eg - f^2 > 0 &\iff \text{Punto Elíptico} \\ eg - f^2 = 0 &\iff \text{Punto Parabólico} \\ eg - f^2 < 0 &\iff \text{Punto Hiperbólico.} \end{aligned}$$

Donde es necesario calcular

$$\bar{r}'_u = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ u^2 \end{array} \right\}, \quad \bar{r}'_v = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ -v \end{array} \right\},$$

$$\bar{N} = \frac{\bar{r}'_u \wedge \bar{r}'_v}{|\bar{r}'_u \wedge \bar{r}'_v|} = \frac{1}{\sqrt{u^4 + v^2 + 1}} \left\{ \begin{array}{c} -u^2 \\ v \\ 1 \end{array} \right\},$$

$$\bar{r}''_{uu} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 2u \end{array} \right\}, \quad \bar{r}''_{uv} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}, \quad \bar{r}''_{vv} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -1 \end{array} \right\}.$$

Resultando,

$$\begin{aligned} e &= \bar{r}''_{uu} \cdot \bar{N} = \frac{2u}{\sqrt{u^4 + v^2 + 1}} \\ f &= \bar{r}''_{uv} \cdot \bar{N} = 0 \\ g &= \bar{r}''_{vv} \cdot \bar{N} = \frac{-1}{\sqrt{u^4 + v^2 + 1}}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$eg - f^2 = \frac{-2u}{u^4 + v^2 + 1}.$$

Siendo la clasificación de los puntos de la superficie la siguiente

$$\begin{aligned} u < 0 &\iff \text{Punto Elíptico} \\ u = 0 &\iff \text{Punto Parabólico} \\ u > 0 &\iff \text{Punto Hiperbólico.} \end{aligned}$$

b) Hallar las líneas de máxima pendiente.

Las líneas de máxima pendiente se definen como las líneas contenidas en la superficie que son ortogonales con la intersección de la superficie con el plano $z = cte.$
Calculamos la dirección de la intersección de la superficie con el plano $z = cte.$

$$\frac{u^3}{3} - \frac{v^2}{2} = cte.$$

Derivando

$$u^2 du - v\, dv = 0 \implies \lambda_1 = \frac{dv}{du} = \frac{u^2}{v}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{(1\ \ \lambda_1)\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{Bmatrix}}{\sqrt{(1\ \ \lambda_1)\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{Bmatrix}}\sqrt{(1\ \ \lambda_2)\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{Bmatrix}}},$$

donde $\begin{Bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{Bmatrix}$ es la dirección de la líneas de máxima pendiente cuando $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

$$\cos(\frac{\pi}{2}) = \frac{(1\ \ \lambda_1)\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{Bmatrix}}{\sqrt{(1\ \ \lambda_1)\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{Bmatrix}}\sqrt{(1\ \ \lambda_2)\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{Bmatrix}}} = 0.$$

Por tanto,

$$(1\ \ \lambda_1)\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{Bmatrix} = 0,$$

donde

$$\begin{aligned} E &= \bar{r}'_u \cdot \bar{r}'_u = 1 + u^4 \\ F &= \bar{r}'_u \cdot \bar{r}'_v = -u^2 v \\ G &= \bar{r}'_v \cdot \bar{r}'_v = 1 + v^2. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{u^2}{v} \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 1 + u^4 & -u^2 v \\ -u^2 v & 1 + v^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{Bmatrix} = 0.$$

Resolviendo se obtiene,

$$\lambda_2 = -\frac{v}{u^2}.$$

Dado que $\lambda_2 = \frac{dv}{du}$, se obtiene

$$\frac{dv}{du} = -\frac{v}{u^2} \implies -\frac{1}{v} dv = \frac{1}{u^2} du.$$

Integrando se obtiene

$$\ln(v) = \frac{1}{u} + c \implies v = e^{\frac{1}{u} + c},$$

donde c es una constante.
Finalmente, sea $r = \bar{\alpha}(u)$ la línea de máxima pendiente

$$\boxed{r = \bar{\alpha}(u) = \begin{Bmatrix} u \\ e^{1/u + c} \\ \dfrac{u^3}{3} - \dfrac{e^{2(1/u + c)}}{2} \end{Bmatrix}}.$$

c) Hallar las ecuaciones de las líneas asintóticas.

Las direcciones asintóticas verifican:

$$\mathrm{II} = e\,(du)^2 + 2\,f\,du\,dv + g\,(dv)^2 = 0.$$

Por tanto, introduciendo los valores previamente calculados

$$\mathrm{II} = \frac{1}{\sqrt{u^4+v^2+1}}\left(2u\,(du)^2 - \,(dv)^2\right) = 0 \implies 2u\,(du)^2 = (dv)^2 \implies \sqrt{2u}\,du = \pm\,dv.$$

Integrando se obtienen las direcciones asintóticas

$$\int \sqrt{2u}\,du = \pm\int dv \implies v = \pm\frac{2}{3}\sqrt{2}\,u^{3/2} + c.$$

Finalmente, las líneas asintóticas $\bar{\alpha}_1(u)$ y $\bar{\alpha}_2(u)$ son:

$$\boxed{r = \bar{\alpha}_1(u) = \left\{\begin{matrix} u \\ \frac{2}{3}\sqrt{2}\,u^{3/2} + c \\ \frac{u^3}{3} - \frac{1}{2}\left(\;\frac{2}{3}\sqrt{2}\,u^{3/2} + c\right)^2 \end{matrix}\right\}, \qquad r = \bar{\alpha}_2(u) = \left\{\begin{matrix} u \\ -\frac{2}{3}\sqrt{2}\,u^{3/2} + c \\ \frac{u^3}{3} - \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}\sqrt{2}\,u^{3/2} + c\right)^2 \end{matrix}\right\}}.$$

9.– Considérese el paraboloide $x = u\,\cos(v)$, $y = u\,\sin(v)$, $z = u^2$. Se pide:

a) Calcular las curvaturas principales en el punto $\mathrm{P}(\sqrt{2}, 0, 2)$.
b) Calcular las curvatura media y de Gauss en el punto P.
c) Hallar las líneas de curvatura en P.

SOLUCIÓN:

a) Calcular las curvaturas principales en el punto P$(\sqrt{2}, 0, 2)$.

$$\bar{r} = \bar{\psi}(\bar{u}) = \left\{\begin{matrix} u\,\cos(v) \\ u\,\sin(v) \\ u^2 \end{matrix}\right\}.$$

Las curvaturas principales se obtienen de la siguiente ecuación

$$(EG - F^2)k_n^2 + (2Ff - Eg - eG)k_n + (eg - f^2) = 0.$$

Siendo preciso calcular

$$\bar{r}'_u = \left\{\begin{matrix} \cos(v) \\ \sin(v) \\ 2u \end{matrix}\right\}, \quad \bar{r}'_v = \left\{\begin{matrix} -u\sin(v) \\ u\cos(v) \\ 0 \end{matrix}\right\}.$$

$$\begin{aligned} E &= \bar{r}'_u \cdot \bar{r}'_u = 1 + 4u^2 \\ F &= \bar{r}'_u \cdot \bar{r}'_v = 0 \\ G &= \bar{r}'_v \cdot \bar{r}'_v = u^2. \end{aligned}$$

$$\bar{N} = \frac{\bar{r}'_u \wedge \bar{r}'_v}{|\bar{r}'_u \wedge \bar{r}'_v|} = \frac{1}{\sqrt{4u^4+u^2}}\left\{\begin{matrix} -2u^2\cos(v) \\ -2u^2\sin(v) \\ u \end{matrix}\right\}.$$

$$\bar{r}''_{uu} = \left\{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{matrix}\right\}, \quad \bar{r}''_{uv} = \left\{\begin{matrix} -\sin(v) \\ \cos(v) \\ 0 \end{matrix}\right\}, \quad \bar{r}''_{vv} = \left\{\begin{matrix} -u\cos(v) \\ -u\sin(v) \\ 0 \end{matrix}\right\}.$$

$$\begin{aligned} e &= \bar{r}''_{uu} \cdot \bar{N} = \frac{2u}{\sqrt{4u^4 + u^2}} \\ f &= \bar{r}''_{uv} \cdot \bar{N} = 0 \\ g &= \bar{r}''_{vv} \cdot \bar{N} = \frac{2u^3}{\sqrt{4u^4 + u^2}}. \end{aligned}$$

Particularizando en el punto P, que se corresponde con $u = \sqrt{2}$ y $v = 0$ se obtiene

$$E = 9, \qquad F = 0, \qquad G = 2, \qquad e = \frac{2}{3}, \qquad f = 0, \qquad g = \frac{4}{3},$$

por tanto las curvaturas principales en el punto P se obtienen de la siguiente ecuación

$$18\, k_n^2 - \frac{40}{3} k_n + \frac{8}{9} = 0 \implies \boxed{\begin{cases} k_{n_1} = \dfrac{2}{27} \\ k_{n_2} = \dfrac{2}{3} \end{cases}}$$

b) Calcular las curvatura media y de Gauss en el punto P.

$$\boxed{\begin{aligned} K_M &= \frac{1}{2}(k_{n_1} + k_{n_2}) = \frac{10}{27} \\ K &= k_{n_1}\, k_{n_2} = \frac{4}{81} \end{aligned}}$$

c) Hallar las líneas de curvatura en P.

Las líneas de curvatura se obtienen de la siguiente ecuación

$$(Fg - fG)\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + (Eg - eG)\frac{dv}{du} + (Ef - eF) = 0.$$

Introduciendo los valores ya calculados

$$(9\frac{4}{3} - 2\frac{2}{3})\frac{dv}{du} = 0 \implies \frac{dv}{du} = 0 \implies v = c,$$

donde c es unas constante. Particularizando en el punto P obtenemos $c = 0$. Por tanto, las líneas de curvatura en el punto P son

$$\boxed{r = \bar{\alpha}(u) = \begin{Bmatrix} u \\ 0 \\ u^2 \end{Bmatrix}}.$$

10.– Se denominan superficies mínimas aquellas para las cuales las curvas asintóticas son ortogonales. Comprobar que la superficie $x = u$, $y = v$, $z = \log(\cos v / \cos u)$ es de área mínima.

SOLUCIÓN:

$$\bar{r} = \bar{\psi}(\bar{u}) = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \log(\cos v / \cos u) \end{Bmatrix}.$$

Las direcciones asintóticas verifican

$$\mathrm{II} = e\,(du)^2 + 2\,f\,du\,dv + g\,(dv)^2 = 0,$$

donde es necesario calcular

$$\bar{r}'_u = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ \tan(u) \end{Bmatrix}, \quad \bar{r}'_v = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\tan(v) \end{Bmatrix},$$

$$\bar{r}''_{uu} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{1}{\cos^2(u)} \end{Bmatrix}, \quad \bar{r}''_{uv} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \bar{r}''_{vv} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{-1}{\cos^2(v)} \end{Bmatrix}.$$

De donde se obtiene

$$\bar{N} = \frac{\bar{r}'_u \wedge \bar{r}'_v}{|\bar{r}'_u \wedge \bar{r}'_v|} = \frac{1}{\sqrt{\tan^2(u) + \tan^2(v) + 1}} \begin{Bmatrix} -\tan(u) \\ \tan(v) \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$e = \bar{r}''_{uu} \cdot \bar{N} = \frac{1}{\sqrt{\tan^2(u) + \tan^2(v) + 1}} \frac{1}{\cos^2(u)}$$

$$f = \bar{r}''_{uv} \cdot \bar{N} = 0$$

$$g = \bar{r}''_{vv} \cdot \bar{N} = \frac{1}{\sqrt{\tan^2(u) + \tan^2(v) + 1}} \frac{-1}{\cos^2(v)}.$$

Por tanto las direcciones asintóticas deben verificar:

$$\mathrm{II} = e\,(du)^2 + 2\,f\,du\,dv + g\,(dv)^2 = \frac{1}{\sqrt{\tan^2(u) + \tan^2(v) + 1}} \left(\frac{(du)^2}{\cos^2(u)} - \frac{(dv)^2}{\cos^2(v)} \right) = 0.$$

Definiendo $\lambda = \dfrac{dv}{du}$ se puede expresar la ecuación anterior como

$$\frac{1}{\sqrt{\tan^2(u) + \tan^2(v) + 1}} \left(\frac{1}{\cos^2(u)} - \frac{\lambda^2}{\cos^2(v)} \right) = 0.$$

Resolviendo se obtiene

$$\lambda_1 = \frac{\cos(v)}{\cos(u)}$$

$$\lambda_2 = -\frac{\cos(v)}{\cos(u)}.$$

A continuación se calcula el ángulo que forman las direcciones asintóticas

$$\cos(\alpha) = \frac{(d\bar{u}_1)^T \underset{\sim}{G}\, d\bar{u}_2}{\sqrt{(d\bar{u}_1)^T \underset{\sim}{G}\, d\bar{u}_1} \sqrt{(d\bar{u}_2)^T \underset{\sim}{G}\, d\bar{u}_2}}, \quad \text{con} \quad \begin{cases} d\bar{u}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{Bmatrix} du_1 \\ d\bar{u}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{Bmatrix} du_2 \end{cases}$$

Luego

$$\cos(\alpha) = \frac{(1 \;\; \lambda_1) \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{Bmatrix}}{\sqrt{(1 \;\; \lambda_1) \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{Bmatrix}} \sqrt{(1 \;\; \lambda_2) \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{Bmatrix}}},$$

donde

$$E = \bar{r}'_u \cdot \bar{r}'_u = \frac{1}{\cos^2(u)}$$

$$F = \bar{r}'_u \cdot \bar{r}'_v = -\tan(u)\,\tan(v)$$

$$G = \bar{r}'_v \cdot \bar{r}'_v = \frac{-1}{\cos^2(v)}.$$

Calculamos primero el numerador:

$$(1 \ \ \lambda_1)\begin{bmatrix} E\,F \\ F\,G \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\cos(v)}{\cos(u)} \end{pmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{1}{\cos^2(u)} & -\tan(u)\,\tan(v) \\ -\tan(u)\,\tan(v) & \dfrac{-1}{\cos^2(v)} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ -\dfrac{\cos(v)}{\cos(u)} \end{Bmatrix} = 0.$$

Por tanto,

$$\cos(\alpha) = 0 \implies \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

Se verifica que las curvas asintóticas son ortogonales, por lo tanto se comprueba que la superficie es de área mínima.

11.– La mayor parte de las cartas náuticas utilizadas a partir del siglo XVII se basan en la proyección cartográfica ideada por Gerardus Mercator en 1569. En la proyección de Mercator se supone que el planeta Tierra es una esfera perfecta de radio R. Los puntos situados sobre la superficie terrestre se proyectan sobre el cilindro tangente al globo terráqueo en el Ecuador. Al desarrollar posteriormente este cilindro, se obtiene el mapa de la superficie terrestre. Debido a la forma en que se realiza la proyección, las líneas verticales del plano se corresponden con los meridianos, mientras que las líneas horizontales se corresponden con los paralelos. Sobre plano, la distancia entre meridianos es constante e independiente de la latitud, mientras que en realidad esta distancia disminuye a medida que nos alejamos del Ecuador, por lo que la escala horizontal estará tanto más distorsionada cuanto mayor sea la latitud. Por ello, y en un intento de mantener las proporciones de los objetos representados en el mapa, en la proyección de Mercator se distorsiona artificialmente la escala vertical (en la misma medida que la horizontal) en función de la latitud. Sean

$$\bar{r} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R\,\cos\varphi\,\cos\lambda \\ R\,\cos\varphi\,\sin\lambda \\ R\,\sin\varphi \end{Bmatrix}$$

las coordenadas en el espacio tridimensional de un punto arbitrario (situado sobre la superficie de la Tierra) de longitud λ (medida en la forma habitual, hacia el Este a partir del Meridiano de Greenwich) y latitud φ (medida en la forma habitual, hacia el Norte a partir del Ecuador). La proyección se realiza de forma que al punto anterior le corresponde el punto de coordenada horizontal u y coordenada vertical v representado en el plano, donde

$$u = R\,\lambda, \qquad v = R\,\ln\Big(\tan\big(\varphi/2 + \pi/4\big)\Big).$$

Se pide:

a) Calcular el tensor métrico de la superficie terrestre expresado en las coordenadas curvilíneas u, v.
b) Comprobar que la proyección de Mercator conserva los ángulos.
c) Comprobar que la proyección de Mercator no conserva el área.

SOLUCIÓN:

a) Calcular el tensor métrico de la superficie terrestre expresado en las coordenadas u, v.

$$\bar{r} = \begin{Bmatrix} R\,\cos\varphi\,\cos\lambda \\ R\,\cos\varphi\,\sin\lambda \\ R\,\sin\varphi \end{Bmatrix}, \qquad \bar{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}, \qquad \bar{\lambda} = \begin{Bmatrix} \lambda \\ \varphi \end{Bmatrix}.$$

La expresión del tensor métrico $\underset{\sim}{G}'$ en coordenadas λ, φ se obtiene mediante el siguiente procedimiento.

$$d\bar{r} = \left[\frac{d\bar{r}}{d\bar{\lambda}}\right] d\bar{\lambda} \ \rightarrow \ d\bar{r}^T \cdot d\bar{r} = d\bar{\lambda}^T \left[\frac{d\bar{r}}{d\bar{\lambda}}\right]^T \left[\frac{d\bar{r}}{d\bar{\lambda}}\right] d\bar{\lambda} = d\bar{\lambda}^T\,\underset{\sim}{G}'\,d\bar{\lambda}, \ \Rightarrow \ \underset{\sim}{G}' = \left[\frac{d\bar{r}}{d\bar{\lambda}}\right]^T \left[\frac{d\bar{r}}{d\bar{\lambda}}\right].$$

En este caso,

$$\left[\frac{d\bar{r}}{d\bar{\lambda}}\right] = \begin{bmatrix} \partial x/\partial\lambda & \partial x/\partial\varphi \\ \partial y/\partial\lambda & \partial y/\partial\varphi \\ \partial z/\partial\lambda & \partial z/\partial\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R\,\cos\varphi\,\sin\lambda & -R\,\sin\varphi\,\cos\lambda \\ R\,\cos\varphi\,\cos\lambda & -R\,\sin\varphi\,\sin\lambda \\ 0 & R\,\cos\varphi \end{bmatrix} \;\rightarrow\; \underset{\sim}{G}' = R^2 \begin{bmatrix} \cos^2\varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para obtener la expresión del tensor métrico $\underset{\sim}{G}$ en coordenadas u, v realizamos el cambio

$$d\bar{\lambda} = \left[\frac{d\bar{\lambda}}{d\bar{u}}\right] d\bar{u} \;\rightarrow\; d\bar{r}^T \cdot d\bar{r} = d\bar{u}^T \left[\frac{d\bar{\lambda}}{d\bar{u}}\right]^T \underset{\sim}{G}' \left[\frac{d\bar{\lambda}}{d\bar{u}}\right] d\bar{u} = d\bar{u}^T \underset{\sim}{G}\, d\bar{u}, \Rightarrow \underset{\sim}{G} = \left[\frac{d\bar{\lambda}}{d\bar{u}}\right]^T \underset{\sim}{G}' \left[\frac{d\bar{\lambda}}{d\bar{u}}\right].$$

En este caso,

$$\left[\frac{d\bar{u}}{d\bar{\lambda}}\right] = \begin{bmatrix} \partial u/\partial\lambda & \partial u/\partial\varphi \\ \partial v/\partial\lambda & \partial v/\partial\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R/\cos\varphi \end{bmatrix},$$

pues

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial\varphi} &= R\,\frac{1}{\tan\left(\varphi/2+\pi/4\right)}\,\frac{1}{\cos^2\left(\varphi/2+\pi/4\right)}\,\frac{1}{2} \\ &= \frac{R}{2\,\sin\left(\varphi/2+\pi/4\right)\,\cos\left(\varphi/2+\pi/4\right)} \\ &= \frac{R}{\sin\left(2\left(\varphi/2+\pi/4\right)\right)} = \frac{R}{\sin\left(\varphi+\pi/2\right)} = \frac{R}{\cos\varphi}, \end{aligned}$$

y las otras tres derivadas parciales que hay que calcular son triviales. Por tanto,

$$\left[\frac{d\bar{\lambda}}{d\bar{u}}\right] = \left[\frac{d\bar{u}}{d\bar{\lambda}}\right]^{-1} = \frac{1}{R}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos\varphi \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \underset{\sim}{G} = \cos^2\varphi \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \cos^2\varphi\, \underset{\sim}{I}.$$

b) Comprobar que la proyección de Mercator conserva los ángulos.

Sean u, v las coordenadas en el plano de un punto cualquiera. Sean du_1, dv_1 las modificaciones en las coordenadas que se producen al avanzar en una dirección arbitraria. Y sean du_2, dv_2 las modificaciones en las coordenadas que se producen al avanzar en otra dirección cualquiera. En el plano, el ángulo formado por estas dos direcciones será $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$, donde $\tan\omega_1 = dv_1/du_1$, y $\tan\omega_2 = dv_2/du_2$, y por tanto

$$\tan(\Delta\omega) = \tan(\omega_2 - \omega_1) = \frac{\tan\omega_2 - \tan\omega_1}{1 + \tan\omega_1\,\tan\omega_2} = \cdots = \frac{du_1\,dv_2 - dv_1\,du_2}{du_1\,du_2 + dv_1\,dv_2}.$$

El ángulo que forman estas dos direcciones sobre la superficie terrestre se puede calcular utilizando el tensor métrico $\underset{\sim}{G}$ mediante la expresión

$$\cos(\Delta\alpha) = \frac{d\bar{u}_1^T\, G\, d\bar{u}_2}{\left(d\bar{u}_1^T\, G\, d\bar{u}_1\right)^{1/2}\,\left(d\bar{u}_2^T\, G\, d\bar{u}_2\right)^{1/2}}, \qquad \text{donde} \quad d\bar{u}_1 = \begin{Bmatrix} du_1 \\ dv_1 \end{Bmatrix},\; d\bar{u}_2 = \begin{Bmatrix} du_2 \\ dv_2 \end{Bmatrix}.$$

Por ser el tensor métrico proporcional a la matriz idéntica, en este caso se obtiene

$$\cos(\Delta\alpha) = \frac{du_1\,du_2 + dv_1\,dv_2}{\left(du_1^2 + dv_1^2\right)^{1/2}\,\left(du_2^2 + dv_2^2\right)^{1/2}},$$

y, operando,

$$\tan(\Delta\alpha) = \frac{\sin(\Delta\alpha)}{\cos(\Delta\alpha)} = \cdots = \frac{du_1\,dv_2 - dv_1\,du_2}{du_1\,du_2 + dv_1\,dv_2} = \tan(\Delta\omega),$$

lo que demuestra que los ángulos medidos sobre plano coinciden con los ángulos medidos sobre la superficie de la Tierra.
Esta propiedad es muy importante, y explica la gran difusión que tuvo la proyección de Mercator como herramienta básica para la navegación. En efecto, en un mapa basado en la proyección de Mercator, las líneas rectas que unen dos puntos cualesquiera se corresponden con trayectorias de rumbo (ángulo entre

la dirección de avance y la dirección del Norte) constante sobre la superficie de la Tierra, lo que permite llegar desde el origen al destino con ayuda de una brújula (basta con mantener en el mundo real el rumbo medido sobre el plano).
Pero, además, al conservarse los ángulos, se conservan las formas de los objetos que son pequeños en comparación con el radio de la tierra. Esta propiedad también es muy importante, y explica por qué se utiliza esta proyección en aplicaciones como Google Maps o Google Earth. En esencia, al realizar un zoom, los objetos (como las edificaciones, por ejemplo) mantienen sus proporciones reales.
Las transformaciones que conservan las formas de los objetos pequeños (o lo que es lo mismo, los ángulos), se denominan transformaciones conformes.

c) Comprobar que la proyección de Mercator no conserva el área.

Sean u, v las coordenadas en el plano de un punto cualquiera. Sobre el plano, el paralelogramo de base du y altura dv trazado a partir de este punto tendrá un área de valor $du\,dv$. Sobre la superficie terráquea, esta figura seguirá siendo un paralelogramo, debido a que la transformación es conforme, pero su área será diferente.
En efecto, la diferencial de área medida sobre la superficie terrestre se puede expresar en función del determinante del Tensor Métrico como

$$dA = \sqrt{\det \underset{\sim}{G}}\; du\, dv,$$

donde en este caso

$$\det \underset{\sim}{G} = \cos^4 \varphi \qquad \longrightarrow \qquad dA = \cos^2 \varphi\, du\, dv,$$

lo que indica que el área medida sobre plano será mayor que el área real, y su valor estará tanto más exagerado cuanto más nos alejemos del Ecuador.