1.– Dada una circunferencia de radio unitario y centrada en el origen, hallar una parametrización de la curva y calcular la longitud de arco.

SOLUCIÓN:

$$x^2 + y^2 = 1 \iff \boxed{\bar{r} = \bar{\alpha}(t) = \begin{Bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{Bmatrix}} \implies \bar{r}' = \begin{Bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \implies |\bar{r}'| = 1.$$

$$s(t) = \int_0^t |\bar{r}'|\, dt \longrightarrow \boxed{s(t) = \int_0^t 1\, dt = t.}$$

2.– Sea la catenaria $x = 3\cosh(2t)$, $y = 3\sinh(2t)$, $z = 6t$, donde $t \in [0, 2\pi]$. Calcular la longitud del arco en función del parámetro t a lo largo de la curva.

SOLUCIÓN:

$$\bar{r} = \bar{\alpha}(t) = 3\begin{Bmatrix} \cosh(2t) \\ \sinh(2t) \\ 2t \end{Bmatrix} \implies \bar{r}' = 6\begin{Bmatrix} \sinh(2t) \\ \cosh(2t) \\ 1 \end{Bmatrix} \implies |\bar{r}'| = 6\sqrt{2}\cosh(2t).$$

$$s(t) = \int_0^t |\bar{r}'|\, dt \longrightarrow \boxed{s(t) = \int_0^t 6\sqrt{2}\cosh(2t)\, dt = 3\sqrt{2}\sinh(2t).}$$

3.– Sea la curva $x = e^t\cos(t)$, $y = e^t\sin(t)$, $z = e^t$, donde $t \in (-\infty, +\infty)$. Reparametrizar esta curva en función de la longitud de arco.

SOLUCIÓN:

$$\bar{r} = \bar{\alpha}(t) = \begin{Bmatrix} e^t\cos(t) \\ e^t\sin(t) \\ e^t \end{Bmatrix} \implies \bar{r}' = \begin{Bmatrix} e^t\left(\cos(t) - \sin(t)\right) \\ e^t\left(\sin(t) + \cos(t)\right) \\ e^t \end{Bmatrix} \implies |\bar{r}'| = \sqrt{3}\, e^t.$$

$$s(t) = \int_0^t |\bar{r}'|\, dt \longrightarrow s(t) = \int_0^t \sqrt{3}\, e^t\, dt = \sqrt{3}\,(e^t - 1).$$

Para expresar la curva en función del arco, se despeja t en función de s

$$s(t) = \sqrt{3}\,(e^t - 1) \iff t(s) = \ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1\right),$$

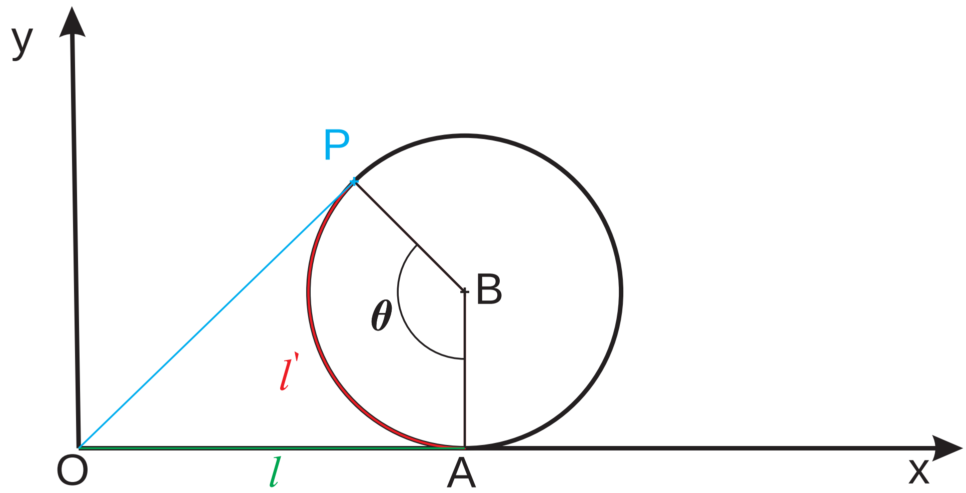
y el resultado se sustituye en la función $\bar{\alpha}(t)$, dando

$$\bar{r} = \bar{\beta}(s) = \bar{\alpha}(t)\big|_{t=t(s)} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\bar{\beta}(s) = \left(\frac{s}{\sqrt{3}}+1\right)\left\{\begin{matrix} \cos\left(\ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}}+1\right)\right) \\ \sin\left(\ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}}+1\right)\right) \\ 1 \end{matrix}\right\}.}$$

4.– Se denomina cicloide a la curva descrita por un punto fijo P perteneciente a una circunferencia que rueda sin deslizar a lo largo de una recta. Considerando que la recta es el eje OX, que el punto P inicialmente se encuentra en el origen y que la circunferencia pertenece al plano OXY y que tiene radio R, se pide:

a) Obtener las ecuaciones paramétricas de la curva.
b) Calcular la longitud de arco a lo largo de la curva.

SOLUCIÓN:



a) Ecuaciones paramétricas

$$\overline{OP} = \overline{OA} + \overline{AB} + \overline{BP} = \left\{\begin{matrix} l \\ 0 \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} 0 \\ R \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} -R\sin(\theta) \\ -R\cos(\theta) \end{matrix}\right\}.$$

Además, $\rightarrow l = l' = R\theta$ por definición del problema. Por tanto,

$$\bar{r} = \left\{\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \bar{\alpha}(\theta) \quad \longrightarrow \quad \boxed{\bar{r} = \bar{\alpha}(\theta) = R\left\{\begin{matrix} \theta - \sin(\theta) \\ 1-\cos(\theta) \end{matrix}\right\}.}$$

b) Longitud de arco

$$\bar{r} = \bar{\alpha}(\theta) = R\left\{\begin{matrix} \theta - \sin(\theta) \\ 1-\cos(\theta) \end{matrix}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \bar{r}' = R\left\{\begin{matrix} 1-\cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{matrix}\right\} \quad \Longrightarrow \quad |\bar{r}'| = R\sqrt{2(1-\cos(\theta))}.$$

$$s(\theta) = \int_0^\theta |\bar{r}'|\, dt \quad \longrightarrow \quad \boxed{s(\theta) = \int_0^\theta R\sqrt{2(1-\cos(\theta))}\, d\theta = 4R\left(1-\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right).}$$

5.– Sea la hélice $x = a\cos(t)$, $y = a\sin(t)$, $z = b\,t$, donde $t \in (-\infty, +\infty)$. Se pide:

a) Calcular el triedro de Frenet con la parametrización genérica actual.
b) Calcular la curvatura y la torsión con la parametrización genérica actual.
c) Reparametrizar la hélice en función de la longitud de arco.
d) Calcular el triedro de Frenet con la reparametrización en función de la longitud del arco.
e) Calcular la curvatura y la torsión con la reparametrización en función de la longitud del arco.
f) Comprobar que se obtienen los mismos resultados independientemente de la parametrización escogida.

SOLUCIÓN:

a) Cálculo del Triedro de Frenet con la parametrización actual

$$\bar{\alpha}(t) = a \begin{Bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ pt \end{Bmatrix} \quad \text{con } p = b/a \quad \Longrightarrow \quad \bar{r}' = a \begin{Bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ p \end{Bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad |\bar{r}'| = a\sqrt{1+p^2}.$$

Por tanto,

$$\frac{ds}{dt} = |\bar{r}'| = a\sqrt{1+p^2}, \qquad \bar{t} = \frac{\bar{r}'}{|\bar{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \begin{Bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ p \end{Bmatrix}.$$

Además,

$$k\,\bar{n} = \frac{d\bar{t}}{ds} = \frac{d\bar{t}}{dt}\,\frac{dt}{ds} = \left(\frac{1}{ds/dt}\right)\frac{d\bar{t}}{dt} \quad \longrightarrow \quad k\,\bar{n} = \left(\frac{1}{a\sqrt{1+p^2}}\right)\frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \begin{Bmatrix} -\cos(t) \\ -\sin(t) \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Calculando el módulo del vector anterior y normalizando, se obtiene

$$k = \frac{1}{a\,(1+p^2)}, \qquad \bar{n} = \begin{Bmatrix} -\cos(t) \\ -\sin(t) \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Finalmente,

$$\bar{b} = \bar{t} \wedge \bar{n} \quad \longrightarrow \quad \bar{b} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \begin{Bmatrix} p\,\sin(t) \\ -p\,\cos(t) \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \begin{Bmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \\ 1/p \end{Bmatrix}$$

En resumen,

$$\boxed{\bar{t} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \begin{Bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ p \end{Bmatrix}, \quad \bar{n} = \begin{Bmatrix} -\cos(t) \\ -\sin(t) \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \bar{b} = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \begin{Bmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \\ 1/p \end{Bmatrix}, \quad \text{donde } \ p = b/a.}$$

b) Cálculo de la curvatura y la torsión con la parametrización actual

$$k = \frac{|\bar{r}' \wedge \bar{r}''|}{|\bar{r}'|^3}, \qquad \tau = \frac{[\,\bar{r}', \bar{r}'', \bar{r}'''\,]}{|\bar{r}' \wedge \bar{r}''|^2}.$$

Previamente han sido calculados $|\bar{r}'|$ y $\bar{r}'$. Ahora es preciso calcular $\bar{r}''$ y $\bar{r}'''$.

$$\bar{r}' = a \begin{Bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ p \end{Bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \bar{r}'' = a \begin{Bmatrix} -\cos(t) \\ -\sin(t) \\ 0 \end{Bmatrix}, \qquad \bar{r}''' = a \begin{Bmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \\ 0 \end{Bmatrix},$$

de donde se obtiene

$$\bar{r}' \wedge \bar{r}'' = a^2\, p \begin{Bmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \\ 1/p \end{Bmatrix}, \quad [\,\bar{r}', \bar{r}'', \bar{r}'''\,] = a^3\, p, \quad |\bar{r}' \wedge \bar{r}''| = a^2\,\sqrt{1+p^2}.$$

Por tanto,

$$\boxed{k = \frac{1}{a\,(1+p^2)}, \qquad \tau = \frac{p}{a\,(1+p^2)},}$$

y se comprueba que el valor de la curvatura coincide con el calculado previamente.

c) Reparametrización en función del arco

$$s(t) = \int_0^t |\bar{r}'|\, dt \quad \longrightarrow \quad s(t) = \int_0^t a\,\sqrt{1+p^2}\, dt = a\,\sqrt{1+p^2}\; t.$$

Para expresar la curva en función del arco, se despeja t en función de s

$$s(t) = a\,\sqrt{1+p^2}\; t \quad \Longleftrightarrow \quad t(s) = \frac{s}{a\,\sqrt{1+p^2}},$$

y el resultado se sustituye en la función $\bar{\alpha}(t)$, dando

$$\bar{\beta}(s) = \bar{\alpha}(t)\big|_{t=t(s)} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\bar{\beta}(s) = a \begin{Bmatrix} \cos(s/c) \\ \sin(s/c) \\ p\, s/c \end{Bmatrix}, \ \text{donde} \ \ c = a\,\sqrt{1+p^2} = \sqrt{a^2+b^2}.}$$

d) Cálculo del Triedro de Frenet con la parametrización natural

Se sabe que

$$\bar{r} = \bar{\beta}(s) \implies \bar{t} = \dot{\bar{r}}, \qquad \bar{n} = \frac{\ddot{\bar{r}}}{|\ddot{\bar{r}}|}, \qquad \bar{b} = \bar{t} \wedge \bar{n}.$$

Luego es preciso calcular previamente

$$\dot{\bar{r}} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \begin{Bmatrix} -\sin(s/c) \\ \cos(s/c) \\ p \end{Bmatrix}, \quad \ddot{\bar{r}} = \frac{1}{a\,(1+p^2)} \begin{Bmatrix} -\cos(s/c) \\ -\sin(s/c) \\ 0 \end{Bmatrix},$$

para obtener finalmente

$$\boxed{\bar{t} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \begin{Bmatrix} -\sin(s/c) \\ \cos(s/c) \\ p \end{Bmatrix}, \ \bar{n} = \begin{Bmatrix} -\cos(s/c) \\ -\sin(s/c) \\ 0 \end{Bmatrix}, \ \bar{b} = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \begin{Bmatrix} \sin(s/c) \\ -\cos(s/c) \\ 1/p \end{Bmatrix}.}$$

e) Cálculo de la curvatura y la torsión con la parametrización natural

$$k = |\ddot{\bar{r}}|, \qquad \tau = \frac{[\,\dot{\bar{r}}, \ddot{\bar{r}}, \dddot{\bar{r}}\,]}{k^2}.$$

Previamente han sido calculados $\dot{\bar{r}}$ y $\ddot{\bar{r}}$. Ahora es preciso calcular $\dddot{\bar{r}}$.

$$\ddot{\bar{r}} = \frac{1}{a\,(1+p^2)} \begin{Bmatrix} -\cos(s/c) \\ -\sin(s/c) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \dddot{\bar{r}} = \frac{1}{a^2\,(1+p^2)^{3/2}} \begin{Bmatrix} \sin(s/c) \\ -\cos(s/c) \\ 0 \end{Bmatrix},$$

de donde se obtiene

$$\dot{\bar{r}} \wedge \ddot{\bar{r}} = \frac{p}{a\,(1+p^2)^{3/2}} \begin{Bmatrix} \sin(s/c) \\ -\cos(s/c) \\ 1/p \end{Bmatrix}, \quad [\,\bar{r}', \bar{r}'', \bar{r}'''\,] = \frac{p}{a^3\,(1+p^2)^3}, \quad |\ddot{\bar{r}}| = \frac{1}{a\,(1+p^2)}.$$

Por tanto,

$$\boxed{k = \frac{1}{a\,(1+p^2)}, \qquad \tau = \frac{p}{a\,(1+p^2)}.}$$

f) Comprobación

Se comprueba que se obtienen los mismos resultados con la parametrización inicial y con la parametrización natural.

6.– Hallar la envolvente de la familia de circunferencias cuyos centros son los puntos $(a, 0)$ con $a \geq 0$, y cuyos diámetros están definidos por los cortes de las rectas verticales que pasan por los correspondientes centros ($x = a$) con la parábola $y^2 = 2px$ (siendo $p > 0$).

SOLUCIÓN:

El radio r de la circunferencia de centro $(a, 0)$ verifica $r^2 = 2pa$. Por tanto, la ecuación de esta circunferencia es

$$(x-a)^2 + y^2 = r^2 = 2pa \quad \Longleftrightarrow \quad f(x,y,a) = 0, \quad \text{con } f(x,y,a) = (x-a)^2 + y^2 - 2pa,$$

de forma que para cada valor del parámetro a se obtiene una curva distinta.
Se sabe que la envolvente de la familia de circunferencias debe satisfacer simultáneamente las ecuaciones

$$f(x,y,a) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial a} f(x,y,a) = 0.$$

Puesto que

$$f(x,y,a) = (x-a)^2 + y^2 - 2pa \implies \frac{\partial f(x,y,a)}{\partial a} = -2(x-a) - 2p,$$

la envolvente en este caso debe satisfacer

$$\left. \begin{array}{l} (x-a)^2 + y^2 - 2pa = 0, \\ -2(x-a) - 2p \quad = 0 \iff a = x + p. \end{array} \right\} \implies p^2 + y^2 - 2p(x+p) = 0$$

Luego la ecuación de la envolvente es

$$\boxed{y^2 = 2px + p^2.}$$

Esta curva es una parábola idéntica a la que define los diámetros, pero trasladada hacia la izquierda una distancia igual a $p/2$.

7.– Sea la curva $x = 2\sinh(t/2)$, $y = 2\cosh(t/2)$, $z = 3t$, donde $t \in (-\infty, +\infty)$ Se pide:

a) Hallar el triedro de Frenet de la curva.
b) Hallar la ecuación del plano osculador para cualquier punto de la curva.
c) Escribir las ecuaciones intrínsecas de la curva.

SOLUCIÓN:

a) Triedro de Frenet

$$\bar{\alpha}(t) = \begin{Bmatrix} 2\,\sinh(t/2) \\ 2\,\cosh(t/2) \\ 3\,t \end{Bmatrix} \implies \bar{r}' = \begin{Bmatrix} \cosh(t/2) \\ \sinh(t/2) \\ 3 \end{Bmatrix} \implies |\bar{r}'| = \sqrt{9+\cosh(t)}.$$

Por tanto,

$$\frac{ds}{dt} = s' = |\bar{r}'| = \sqrt{9+\cosh(t)}, \qquad \bar{t} = \frac{1}{|\bar{r}'|}\,\bar{r}' \quad \longrightarrow \quad \boxed{\bar{t} = \big(9+\cosh(t)\big)^{-1/2} \begin{Bmatrix} \cosh(t/2) \\ \sinh(t/2) \\ 3 \end{Bmatrix}.}$$

a1) Procedimiento N.º 1: cálculo de la normal y obtención posterior de la binormal

$$\left.\begin{aligned} k\,\bar{n} &= \frac{d\bar{t}}{ds} = \frac{d\bar{t}}{dt}\,\frac{dt}{ds} = \frac{1}{|\bar{r}'|}\,\bar{t}' \\ \bar{t}' &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{|\bar{r}'|}\,\bar{r}'\right) = -\frac{1}{|\bar{r}'|^2}\,\frac{d}{dt}\big(|\bar{r}'|\big)\,\bar{r}' + \frac{1}{|\bar{r}'|}\,\bar{r}'' \\ \frac{d}{dt}\big(|\bar{r}'|\big) &= \frac{d}{dt}\left((\bar{r}'\cdot\bar{r}')^{1/2}\right) = \frac{1}{|\bar{r}'|}\,\bar{r}'\cdot\bar{r}'' \end{aligned}\right\} \implies k\,\bar{n} = \frac{1}{|\bar{r}'|^4}\,\left(-(\bar{r}'\cdot\bar{r}'')\,\bar{r}' + |\bar{r}'|^2\,\bar{r}''\right).$$

Se calculan los valores necesarios,

$$\bar{r}' = \begin{Bmatrix} \cosh(t/2) \\ \sinh(t/2) \\ 3 \end{Bmatrix} \implies \bar{r}'' = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} \sinh(t/2) \\ \cosh(t/2) \\ 0 \end{Bmatrix} \implies \bar{r}'\cdot\bar{r}'' = \frac{1}{2}\,\sinh(t).$$

Luego,

$$\begin{aligned} k\,\bar{n} &= \frac{1}{\big(9+\cosh(t)\big)^2}\left(-\frac{1}{2}\,\sinh(t)\begin{Bmatrix} \cosh(t/2) \\ \sinh(t/2) \\ 3 \end{Bmatrix} + \big(9+\cosh(t)\big)\,\frac{1}{2}\begin{Bmatrix} \sinh(t/2) \\ \cosh(t/2) \\ 0 \end{Bmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{2\,\big(9+\cosh(t)\big)^2}\begin{Bmatrix} 8\,\sinh(t/2) \\ 10\,\cosh(t/2) \\ -3\,\sinh(t) \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

De donde,

$$k = \frac{\big(1+9\,\cosh(t)\big)^{1/2}}{2\,\big(9+\cosh(t)\big)^{3/2}}, \qquad \boxed{\bar{n} = \Big(\big(1+9\,\cosh(t)\big)\,\big(9+\cosh(t)\big)\Big)^{-1/2}\begin{Bmatrix} 8\,\sinh(t/2) \\ 10\,\cosh(t/2) \\ -3\,\sinh(t) \end{Bmatrix},}$$

y finalmente,

$$\bar{b} = \bar{t}\wedge\bar{n} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\bar{b} = \big(1+9\,\cosh(t)\big)^{-1/2}\begin{Bmatrix} -3\,\cosh(t/2) \\ 3\,\sinh(t/2) \\ 1 \end{Bmatrix}.} \qquad \text{(simplificación no trivial)}$$

a2) Procedimiento N.º 2: cálculo de la binormal y obtención posterior de la normal

$$\left.\begin{aligned} \bar{r}' &= \dot{\bar{r}}\, s' = s'\, \bar{t} \\ \bar{r}'' &= \ddot{\bar{r}}\, (s')^2 + \dot{\bar{r}}\, s'' = s''\, \bar{t} + (s')^2\, k\, \bar{n} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \bar{r}' \wedge \bar{r}'' = (s')^3\, k\, \bar{b}.$$

Se calculan los valores necesarios,

$$\bar{r}' = \begin{Bmatrix} \cosh(t/2) \\ \sinh(t/2) \\ 3 \end{Bmatrix} \Longrightarrow \bar{r}'' = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \sinh(t/2) \\ \cosh(t/2) \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Luego,

$$(s')^3\, k\, \bar{b} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} -3\, \cosh(t/2) \\ 3\, \sinh(t/2) \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

De donde,

$$(s')^3\, k = \frac{1}{2}\big(1 + 9\, \cosh(t)\big)^{1/2}, \qquad \boxed{\bar{b} = \big(1 + 9\, \cosh(t)\big)^{-1/2} \begin{Bmatrix} -3\, \cosh(t/2) \\ 3\, \sinh(t/2) \\ 1 \end{Bmatrix},}$$

y finalmente,

$$\bar{n} = \bar{b} \wedge \bar{t} \longrightarrow \boxed{\bar{n} = \Big(\big(1 + 9\, \cosh(t)\big)\, \big(9 + \cosh(t)\big)\Big)^{-1/2} \begin{Bmatrix} 8\, \sinh(t/2) \\ 10\, \cosh(t/2) \\ -3\, \sinh(t) \end{Bmatrix}.}$$

Nota: Se observa que este procedimiento es más sencillo que el anterior, debido a que la expresión de la derivada de la tangente es relativamente complicada. Los cálculos que requiere este segundo procedimiento suelen ser más sencillos.

b) Ecuación del plano osculador

Por ser perpendicular a la binormal, su ecuación es

$$\big(\bar{r} - \bar{\alpha}(t)\big) \cdot \bar{b}(t) = 0 \longrightarrow \boxed{-\big(3\, \cosh(t/2)\big)\, x + \big(3\, \sinh(t/2)\big)\, y + z - 3t = 0.}$$

c) Ecuaciones intrínsecas de la curva

Para calcular la curvatura y la torsión se utilizan las expresiones

$$k = \frac{|\bar{r}' \wedge \bar{r}''|}{|\bar{r}'|^3}, \qquad \tau = \frac{[\,\bar{r}', \bar{r}'', \bar{r}'''\,]}{|\bar{r}' \wedge \bar{r}''|^2}.$$

Previamente han sido calculados $|\bar{r}'|$ y $\bar{r}'$. Ahora es preciso calcular $\bar{r}''$ y $\bar{r}'''$.

$$\bar{r}' = \begin{Bmatrix} \cosh(t/2) \\ \sinh(t/2) \\ 3 \end{Bmatrix} \longrightarrow \bar{r}'' = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \sinh(t/2) \\ \cosh(t/2) \\ 0 \end{Bmatrix}, \qquad \bar{r}''' = \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} \cosh(t/2) \\ \sinh(t/2) \\ 0 \end{Bmatrix},$$

de donde se obtiene

$$\bar{r}' \wedge \bar{r}'' = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} -3\, \cosh(t/2) \\ 3\, \sinh(t/2) \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad [\,\bar{r}', \bar{r}'', \bar{r}'''\,] = -\frac{3}{8}, \quad |\bar{r}' \wedge \bar{r}''| = \frac{1}{2}\sqrt{1 + 9\, \cosh(t)}.$$

Por tanto,

$$k(t) = \frac{\left(1+9\,\cosh(t)\right)^{1/2}}{2\left(9+\cosh(t)\right)^{3/2}}, \qquad \tau(t) = \frac{-3}{2\left(1+9\,\cosh(t)\right)},$$

donde se comprueba que el valor de la curvatura coincide con el calculado previamente.
En consecuencia, las ecuaciones intrínsecas de la curva son

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} k(s) = \left.\dfrac{\left(1+9\,\cosh(t)\right)^{1/2}}{2\left(9+\cosh(t)\right)^{3/2}}\right|_{t=t(s)} \\ \tau(s) = \left.\dfrac{-3}{2\left(1+9\,\cosh(t)\right)}\right|_{t=t(s)} \end{array}\right\}, \text{ donde } t(s) \text{ es la inversa de } s(t) = \int \sqrt{9+\cosh(t)}\,dt.}$$

Nota: En sentido estricto, las ecuaciones intrínsecas de la curva definen los valores de la curvatura y la torsión en función del arco. Para ello habría que obtener explícitamente la expresión de $t(s)$ y sustituirla en las expresiones de $k(t)$ y $\tau(t)$. En este caso, $s(t)$ es una integral elíptica de segunda especie, por lo que no es posible simplificar más la expresión anterior.

8.– Sea la curva $x = \frac{1}{3}(1+t)^{3/2}$, $y = \frac{1}{3}(1-t)^{3/2}$, $z = t/\sqrt{2}$, donde $t \in [-1, 1]$. Se pide:

a) Hallar el triedro de Frenet de la curva en el punto $P \equiv (\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ 0)$.
b) Calcular la curvatura y la torsión en el punto P.
c) ¿Es plana la curva? Justificar la respuesta.
d) Hallar las ecuaciones de los planos osculador, normal y rectificante en P.

SOLUCIÓN:

a) Triedro de Frenet en el punto $P \equiv (\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ 0)$

$$\bar{r} = \bar{\alpha}(t) = \left\{\begin{array}{c} \frac{1}{3}(1+t)^{3/2} \\ \frac{1}{3}(1-t)^{3/2} \\ t/\sqrt{2} \end{array}\right\} \implies \bar{r}' = \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{c} (1+t)^{1/2} \\ -(1-t)^{1/2} \\ \sqrt{2} \end{array}\right\} \implies |\bar{r}'| = 1.$$

Luego se trata de una parametrización natural, y por tanto se puede escribir

$$t = s \implies \bar{r} = \bar{\beta}(s) = \left\{\begin{array}{c} \frac{1}{3}(1+s)^{3/2} \\ \frac{1}{3}(1-s)^{3/2} \\ s/\sqrt{2} \end{array}\right\}.$$

Se sabe que

$$\bar{r} = \bar{\beta}(s) \implies \bar{t} = \dot{\bar{r}}, \qquad \bar{n} = \frac{\ddot{\bar{r}}}{|\ddot{\bar{r}}|}, \qquad \bar{b} = \bar{t} \wedge \bar{n},$$

donde es preciso calcular previamente

$$\dot{\bar{r}} = \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{c} (1+s)^{1/2} \\ -(1-s)^{1/2} \\ \sqrt{2} \end{array}\right\}, \qquad \ddot{\bar{r}} = \frac{1}{4}\left\{\begin{array}{c} (1+s)^{-1/2} \\ (1-s)^{-1/2} \\ 0 \end{array}\right\},$$

para obtener

$$\bar{t} = \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{c} (1+s)^{1/2} \\ -(1-s)^{1/2} \\ \sqrt{2} \end{array}\right\}, \quad \bar{n} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left\{\begin{array}{c} (1-s)^{1/2} \\ (1+s)^{1/2} \\ 0 \end{array}\right\}, \quad \bar{b} = \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{c} -(1+s)^{1/2} \\ (1-s)^{1/2} \\ \sqrt{2} \end{array}\right\}.$$

Particularizando en el punto $P \equiv \begin{Bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{Bmatrix}$, que se corresponde con $s = 0$, se obtiene:

$$\boxed{\bar{t}(0) = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{Bmatrix}, \quad \bar{n}(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \bar{b}(0) = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{Bmatrix}.}$$

b) Curvatura y torsión en el punto P

$$k = |\ddot{\bar{r}}|, \qquad \tau = \frac{[\dot{\bar{r}}, \ddot{\bar{r}}, \dddot{\bar{r}}]}{k^2}.$$

Previamente han sido calculados $\dot{\bar{r}}$ y $\ddot{\bar{r}}$. Ahora es preciso calcular $\dddot{\bar{r}}$.

$$\dddot{\bar{r}} = -\frac{1}{8}\begin{Bmatrix} (1+s)^{-3/2} \\ -(1-s)^{-3/2} \\ 0 \end{Bmatrix},$$

de donde se obtiene

$$[\dot{\bar{r}}, \ddot{\bar{r}}, \dddot{\bar{r}}] = \frac{\sqrt{2}}{32}(1-s^2)^{-3/2}, \quad |\ddot{\bar{r}}| = \frac{\sqrt{2}}{4}(1-s^2)^{-1/2}.$$

Por tanto,

$$k(s) = \frac{\sqrt{2}}{4}(1-s^2)^{-1/2}, \qquad \tau(s) = \frac{\sqrt{2}}{4}(1-s^2)^{-1/2},$$

y en particular en el punto P (para el que $s = 0$),

$$\boxed{k(0) = \frac{\sqrt{2}}{4}, \qquad \tau(0) = \frac{\sqrt{2}}{4}.}$$

c) Averiguar si la curva es plana o no

Para ello se analiza el valor de la torsión,

$$\tau(s) = \frac{\sqrt{2}}{4}(1-s^2)^{-1/2} \quad \neq 0 \quad \text{(en general)} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\text{la curva NO es plana.}}$$

d) Ecuaciones de los planos osculador, normal y rectificante en P

El plano osculador en P debe verificar $\bar{b}(0) \cdot \big(\bar{r} - \bar{\alpha}(0)\big) = 0$. Luego

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{Bmatrix} \right) = 0.$$

El plano normal en P debe verificar $\bar{t}(0) \cdot \big(\bar{r} - \bar{\alpha}(0)\big) = 0$. Luego

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{Bmatrix} \right) = 0.$$

El plano rectificante en P debe verificar $\bar{n}(0)\cdot\big(\bar{r}-\bar{\alpha}(0)\big)=0$. Luego,

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}\left(\begin{Bmatrix}x\\ y\\ z\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}1/3\\ 1/3\\ 0\end{Bmatrix}\right)=0.$$

Simplificando las expresiones anteriores se obtienen las ecuaciones

PLANO OSCULADOR	$\longrightarrow$	$x-y-z\sqrt{2}=0,$
PLANO NORMAL	$\longrightarrow$	$x-y+z\sqrt{2}=0,$
PLANO RECTIFICANTE	$\longrightarrow$	$x+y-2/3\ =0.$

9.– Sea la curva $x=a\cos(t)$, $y=a\sin(t)$, $z=f(t)$. Hallar la expresión más general de $f(t)$ para que se cumpla la condición de que la curva sea plana.

SOLUCIÓN:

$$\bar{r}=\bar{\alpha}(t)=\begin{Bmatrix}a\ \cos(t)\\ a\ \sin(t)\\ f(t)\end{Bmatrix}.$$

Es condición necesaria y suficiente para que una curva sea plana que $\tau=0$. Por tanto:

$$\tau=\frac{[\,\bar{r}',\bar{r}'',\bar{r}'''\,]}{|\bar{r}'\wedge\bar{r}''|^2}=0\implies[\,\bar{r}',\bar{r}'',\bar{r}'''\,]=0.$$

Es preciso calcular $\bar{r}'$, $\bar{r}''$ y $\bar{r}'''$.

$$\bar{r}'=\begin{Bmatrix}-a\ \sin(t)\\ a\ \cos(t)\\ f'(t)\end{Bmatrix},\qquad \bar{r}''=\begin{Bmatrix}-a\ \cos(t)\\ -a\ \sin(t)\\ f''(t)\end{Bmatrix},\qquad \bar{r}'''=\begin{Bmatrix}a\ \sin(t)\\ -a\ \cos(t)\\ f'''(t)\end{Bmatrix},$$

de donde se obtiene

$$\bar{r}'\wedge\bar{r}''=\begin{Bmatrix}a\,f''(t)\ \cos(t)+a\,f'(t)\ \sin(t)\\ a\,f''(t)\ \sin(t)-a\,f'(t)\ \cos(t)\\ a^2\end{Bmatrix},\quad[\,\bar{r}',\bar{r}'',\bar{r}'''\,]=a^2\left(f'(t)+f'''(t)\right),$$

Por tanto,

$$\tau=0\implies f'(t)+f'''(t)=0,$$

y resolviendo esta ecuación diferencial se obtiene la solución general

$$\boxed{f(t)=c_1\ \cos t+c_2\ \sin t+c_3}$$

en función de las constantes c_1, c_2 y c_3.
La curva resultante es el corte del cilindro vertical de sección circular y radio a por el plano

$$z=c_1\,x+c_2\,y+c_3,$$

esto es, por cualquier plano que no sea vertical.

10.– Sea la hélice $x = 4\cos(t)$, $y = 4\sin(t)$, $z = 3t$, donde $t \in [-1, 1]$. Se pide:

a) Hallar el lugar geométrico de los centros de curvatura. ¿Qué nombre recibe esta curva?
b) Hallar el centro y el radio de curvatura correspondientes al punto $(4, 0, 0)$.
c) Hallar la ecuación de la esfera osculatriz en el punto $(4, 0, 0)$.

SOLUCIÓN:

a) Hallar el lugar geométrico de los centros de curvatura. ¿Qué nombre recibe esta curva?

Sea $\bar{r}_c$ el vector de posición del centro de curvatura correspondiente al punto $\bar{r}_0$ de la curva. Se sabe que

$$\bar{r}_c = \bar{r}_0 + R_c\,\bar{n}_0, \qquad \text{con} \quad R_c = \frac{1}{k_0},$$

donde k_0 y $\bar{n}_0$ representan la curvatura y la normal, respectivamente, en el punto $\bar{r}_0$.
En este caso

$$\bar{r} = \bar{\alpha}(t) = \begin{Bmatrix} 4\,\cos(t) \\ 4\,\sin(t) \\ 3\,t \end{Bmatrix} \implies \bar{r}' = \begin{Bmatrix} -4\,\sin(t) \\ 4\,\cos(t) \\ 3 \end{Bmatrix} \implies |\bar{r}'| = 5.$$

Por tanto,

$$\frac{ds}{dt} = |\bar{r}'| = 5, \qquad \bar{t} = \frac{\bar{r}'}{|\bar{r}'|} = \frac{1}{5}\begin{Bmatrix} -4\,\sin(t) \\ 4\,\cos(t) \\ 3 \end{Bmatrix}.$$

Además,

$$k\,\bar{n} = \frac{d\bar{t}}{ds} = \frac{d\bar{t}}{dt}\,\frac{dt}{ds} = \left(\frac{1}{ds/dt}\right)\frac{d\bar{t}}{dt} \longrightarrow k\,\bar{n} = \left(\frac{1}{5}\right)\frac{1}{5}\begin{Bmatrix} -4\,\cos(t) \\ -4\,\sin(t) \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Calculando el módulo del vector anterior y normalizando, se obtiene

$$k(t) = \frac{4}{25}, \qquad \bar{n}(t) = \begin{Bmatrix} -\cos(t) \\ -\sin(t) \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Por tanto, si $r_0 = \bar{\alpha}(t)$, $\bar{n}_0 = \bar{n}(t)$ y $k_0 = k(t)$, se tiene

$$\bar{r}_c = \bar{\alpha}_c(t) = \bar{\alpha}(t) + \frac{1}{k(t)}\,\bar{n}(t) \longrightarrow \boxed{\bar{r}_c = \bar{\alpha}_c(t) = \begin{Bmatrix} -(9/4)\,\cos(t) \\ -(9/4)\,\sin(t) \\ 3t \end{Bmatrix},}$$

lo que indica que el lugar geométrico de los centros de curvatura es una hélice.

b) Centro y radio de curvatura correspondientes al punto $(4, 0, 0)$

$$t = 0 \implies R_c = \frac{1}{k(0)}, \quad r_c = \bar{\alpha}_c(0) \longrightarrow \boxed{R_c = \frac{25}{4}, \qquad \bar{r}_c = \begin{Bmatrix} -9/4 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.}$$

c) Ecuación de la esfera osculatriz en el punto $(4, 0, 0)$

La esfera osculatriz en un punto r_0 puede expresarse como

$$(\bar{r} - \bar{r}_e)\cdot(\bar{r} - \bar{r}_e) = R_e^2,$$

donde,

$$\bar{r}_e = \bar{r}_0 + \left(\frac{1}{k_0}\right)\bar{n}_0 + \left(\frac{-\dot{k}_0}{k_0^2\tau_0}\right)\bar{b}_0, \qquad R_e = \sqrt{\left(\frac{1}{k_0}\right)^2 + \left(\frac{-\dot{k}_0}{k_0^2\tau_0}\right)^2}.$$

Puesto que el punto se corresponde con $t = 0$, se requieren los valores de $\bar{r}_0 = \bar{\alpha}(0)$, $\bar{n}_0 = \bar{n}(0)$, $\bar{b}_0 = \bar{b}(0)$, $k_0 = k(0)$, $\dot{k}_0 = \dot{k}(0)$ y $\tau_0 = \tau(0)$, pero

$$\dot{k} = \frac{dk}{ds} = \frac{dk}{dt}\frac{dt}{ds} = \left(\frac{1}{|\bar{r}'|}\right)k',$$

y al ser $k(t) =$ constante se tiene $\dot{k}(t) = 0\ \forall t$, por lo que $\dot{k}_0 = 0$. En consecuencia, se anulan los términos en los que aparece $\dot{k}_0$, por lo que no es necesario calcular ni la torsión ni la binormal. Por tanto,

$$\bar{r}_e = \bar{r}_0 + \left(\frac{1}{k_0}\right)\bar{n}_0, \qquad R_e = \frac{1}{k_0},$$

lo que implica que el radio y el centro de la esfera coinciden con el centro y el radio de curvatura, respectivamente. Particularizando en el punto P se obtiene

$$t = 0 \implies R_e = \frac{25}{4}, \qquad \bar{r}_e = \begin{Bmatrix} -9/4 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

por lo que la ecuación de la esfera osculatriz resulta ser

$$\boxed{\left(x + \frac{9}{4}\right)^2 + y^2 + z^2 = \frac{625}{16}.}$$

11.– Sea la curva $x = (t)$, $y = \cosh(t)$, $z = 0$, donde $t \in (-\infty, +\infty)$. Se pide:

a) Hallar la familia de evolventes a la curva.
b) Hallar la evoluta a la curva.

SOLUCIÓN:

a) Hallar la familia de involutas (o evolventes) a la curva

Sea $\bar{r}_I = \alpha_I(t)$ el vector de posición del punto de la involuta correspondiente al punto $r = \alpha(t) = \beta(s)$ de la curva original. Se sabe que

$$\bar{r}_I = \bar{\beta}(s) + (c - s)\,\bar{t}(s) \implies \bar{r}_I = \bar{\alpha}_I(t) = \bar{\alpha}(t) + \big(c - s(t)\big)\,\bar{t}(t),$$

donde $s(t)$ y $\bar{t}(t)$ son el arco y el vector tangente, respectivamente, de la curva original.
En este caso

$$\bar{r} = \bar{\alpha}(t) = \begin{Bmatrix} t \\ \cosh(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \implies \bar{r}' = \begin{Bmatrix} 1 \\ \sinh(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \implies |\bar{r}'| = \cosh(t),$$

luego,

$$\bar{t} = \frac{\bar{r}'}{|\bar{r}'|} \longrightarrow \bar{t}(t) = \frac{1}{\cosh(t)}\begin{Bmatrix} 1 \\ \sinh(t) \\ 0 \end{Bmatrix},$$

y

$$\frac{ds}{dt} = |\bar{r}'| \implies s(t) = \int_0^t |\bar{r}'|dt \longrightarrow s(t) = \sinh(t).$$

Por tanto, la ecuación de la familia de involutas es

$$\bar{r}_I = \bar{\alpha}_I(t) = \begin{Bmatrix} t \\ \cosh(t) \\ 0 \end{Bmatrix} + (c - \sinh(t)) \frac{1}{\cosh(t)} \begin{Bmatrix} 1 \\ \sinh(t) \\ 0 \end{Bmatrix},$$

y simplificando, se obtiene

$$\boxed{\bar{r}_I = \bar{\alpha}_I(t) = \frac{1}{\cosh(t)} \begin{Bmatrix} c - \sinh(t) + t\,\cosh(t) \\ 1 + c\,\sinh(t) \\ 0 \end{Bmatrix},}$$

donde c es el parámetro que produce las diferentes curvas de la familia.

b) Hallar la evoluta a la curva

Sea $\bar{r}_E = \alpha_E(t)$ el vector de posición del punto de la evoluta correspondiente al punto $r = \alpha(t) = \beta(s)$ de la curva original. Se sabe que

$$\bar{r}_E = \bar{\beta}(s) + \frac{1}{k(s)}\,\bar{n}(s) + \frac{1}{k(s)}\,\cot\left(\int \tau(s)\,ds + \text{constante}\right)\,\bar{b}(s),$$

lo que equivale a

$$\bar{r}_E = \bar{\alpha}_E(t) = \bar{\alpha}(t) + \frac{1}{k(t)}\,\bar{n}(t) + \frac{1}{k(t)}\,\cot\left(\int \tau(t)\,s'(t)\,dt + \text{constante}\right)\,\bar{b}(t),$$

donde $k(t)$, $\tau(t)$, $\bar{n}(t)$, y $\bar{b}(t)$ son la curvatura, la torsión y los vectores normal y binormal, respectivamente, de la curva original, y $s'(t) = |\bar{\alpha}'(t)|$.
En este caso $z = 0$, por lo que la curva es plana. En consecuencia $\tau(t) = 0\ \forall t$, por lo que no es necesario calcular la integral. Además, la cotangente de la constante es otra constante $c \in (-\infty, \infty)$.
Para calcular $k(t)$, $\bar{b}(t)$ y $\bar{n}(t)$ se utilizan las expresiones

$$k = \frac{|\bar{r}' \wedge \bar{r}''|}{|\bar{r}'|^3}, \qquad \bar{b} = \frac{\bar{r}' \wedge \bar{r}''}{|\bar{r}' \wedge \bar{r}''|}, \qquad \bar{n} = \bar{b} \wedge \bar{t},$$

donde se calcula en primer lugar la binormal y se obtiene a continuación la normal (según el procedimiento desarrollado en el apartado **a2** del problema 7). Para ello es preciso calcular previamente

$$\bar{r}''(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ \cosh(t) \\ 0 \end{Bmatrix}, \qquad \bar{r}' \wedge \bar{r}'' = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cosh(t) \end{Bmatrix}, \qquad |\bar{r}' \wedge \bar{r}''| = \cosh(t).$$

A continuación se obtiene

$$k(t) = \frac{1}{\cosh^2(t)}, \qquad \bar{b}(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, \qquad \bar{n}(t) = \frac{1}{\cosh(t)} \begin{Bmatrix} -\sinh(t) \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

y por tanto, la ecuación de la familia de evolutas es

$$\bar{r}_E = \bar{\alpha}_E(t) = \begin{Bmatrix} t \\ \cosh(t) \\ 0 \end{Bmatrix} + \cosh^2(t)\,\frac{1}{\cosh(t)} \begin{Bmatrix} -\sinh(t) \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \cosh^2(t)\,c \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

Simplificando, se obtiene

$$\boxed{\bar{r}_E = \bar{\alpha}_E(t) = \begin{Bmatrix} t - \cosh(t)\,\sinh(t) \\ 2\,\cosh(t) \\ c\,\cosh^2(t) \end{Bmatrix},}$$

donde c es el parámetro que produce las diferentes curvas de la familia.

12.– Hallar la expresión paramétrica de la curva $\bar{r} = \bar{\alpha}(t)$ sabiendo que:

a) Su torsión es $\tau = -1/a$, con $a > 0$.
b) Su binormal tiene la misma dirección y el mismo sentido que el vector $\bar{v}(t)$, siendo

$$\bar{v}(t) = \left\{ \begin{array}{c} \cos^2(t) \\ \sin(t)\cos(t) \\ \sin(t) \end{array} \right\}.$$

SOLUCIÓN:

$$\bar{b}(t) = \frac{\bar{v}(t)}{|\bar{v}(t)|} \quad \text{con} \quad \bar{v}(t) = \left\{ \begin{array}{c} \cos^2(t) \\ \sin(t)\ \cos(t) \\ \sin(t) \end{array} \right\} \quad \longrightarrow \quad |\bar{v}(t)| = 1, \quad \bar{b}(t) = \left\{ \begin{array}{c} \cos^2(t) \\ \sin(t)\ \cos(t) \\ \sin(t) \end{array} \right\}$$

Se sabe que

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\bar{b}} = -\tau\,\bar{n} \\ \dot{\bar{b}} = \dfrac{d\bar{b}}{ds} = \dfrac{d\bar{b}}{dt}\,\dfrac{dt}{ds} = \dfrac{1}{s'}\,\bar{b}' \end{array} \right\} \implies -\tau\,\bar{n} = \frac{\bar{b}'}{s'} \implies \bar{n} = -\frac{1}{\tau}\,\frac{1}{s'}\,\bar{b}' = \frac{a}{s'}\,\bar{b}'.$$

Por tanto, se puede calcular la normal a partir de la derivada de la binormal. Así,

$$\bar{b}'(t) = \left\{ \begin{array}{c} -2\ \cos(t)\ \sin(t) \\ \cos^2(t) - \sin^2(t) \\ \cos(t) \end{array} \right\} \implies \bar{n}(t) = \frac{a}{s'(t)} \left\{ \begin{array}{c} -2\ \cos(t)\ \sin(t) \\ \cos^2(t) - \sin^2(t) \\ \cos(t) \end{array} \right\}$$

Una vez se conocen la normal y la binormal, se puede calcular la tangente en la forma

$$\bar{t} = \bar{n} \wedge \bar{b} \quad \longrightarrow \quad \bar{t}(t) = \frac{a}{s'(t)} \left\{ \begin{array}{c} -\sin^3(t) \\ \cos^2(t)\ \left(1 + \sin^2(t)\right) \\ -\cos^2(t) \end{array} \right\}.$$

Por otro lado,

$$\bar{r}' = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}}{ds}\,\frac{ds}{dt} = \dot{\bar{r}}\,s' = s'\,\bar{t},$$

luego

$$\bar{r} = \bar{\alpha}(t) \implies \bar{\alpha}'(t) = s'(t)\,\bar{t}(t) = a \left\{ \begin{array}{c} -\sin^3(t) \\ \cos(t)\ \left(1 + \sin^2(t)\right) \\ -\cos^2(t) \end{array} \right\}.$$

Lo que finalmente permite obtener las ecuaciones paramétricas de la curva,

$$\bar{\alpha}(t) = \int \bar{\alpha}'(t)\ dt + \bar{c} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\bar{\alpha}(t) = a \left\{ \begin{array}{c} \cos(t)\big(1 - (1/3)\ \cos^2(t)\big) \\ \sin(t)\big(1 + (1/3)\ \sin^2(t)\big) \\ -(1/2)\ \big(t + (1/2)\ \sin(2t)\big) \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{array} \right\}}.$$

13.– Determinar las ecuaciones paramétricas de la curva $\bar{r} = \bar{\beta}(s)$ cuyas ecuaciones intrínsecas son $\kappa(s) = 4$ y $\tau(s) = 3$, sabiendo además que el vector tangente, el vector normal y el vector de posición en $s = 0$ tienen respectivamente los valores siguientes:

$$\bar{t}_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 4/5 \\ 3/5 \end{Bmatrix}, \qquad \bar{n}_0 = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \qquad \bar{r}_0 = \begin{Bmatrix} 4/25 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

SOLUCIÓN:

Se sabe que

$$\frac{d}{ds}\begin{bmatrix}\bar{t} & \bar{n} & \bar{b}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\bar{t} & \bar{n} & \bar{b}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -k & 0 \\ k & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dot{\bar{t}} = & 4\,\bar{n} \\ \dot{\bar{n}} = -4\,\bar{t} & +3\,\bar{b} \\ \dot{\bar{b}} = & -3\,\bar{n} \end{cases}$$

Por tanto,

$$\ddot{\bar{n}} = -4\,\dot{\bar{t}} + 3\,\dot{\bar{b}} = -16\,\bar{n} - 9\,\bar{n} = -25\,\bar{n} \quad \Longrightarrow \quad \ddot{\bar{n}} = -25\,\bar{n}.$$

Integrando esta ecuación diferencial se obtiene

$$\bar{n}(s) = \bar{n}(0)\,\cos(5\,s) + \bar{c}\,\sin(5\,s).$$

Luego

$$\dot{\bar{t}} = \ \ 4\left(\bar{n}(0)\,\cos(5\,s) + \bar{c}\,\sin(5\,s)\right) \quad \Longrightarrow \quad \bar{t}(s) = \bar{t}(0) + \frac{4}{5}\left(\bar{n}(0)\,\sin(5\,s) - \bar{c}\left(\cos(5\,s) - 1\right)\right),$$
$$\dot{\bar{b}} = -3\left(\bar{n}(0)\,\cos(5\,s) + \bar{c}\,\sin(5\,s)\right) \quad \Longrightarrow \quad \bar{b}(s) = \bar{b}(0) - \frac{3}{5}\left(\bar{n}(0)\,\sin(5\,s) - \bar{c}\left(\cos(5\,s) - 1\right)\right).$$

De acuerdo con el enunciado, los valores iniciales en $s = 0$ son

$$\bar{t}(0) = \bar{t}_0 = \frac{1}{5}\begin{Bmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{Bmatrix}, \quad \bar{n}(0) = \bar{n}_0 = \frac{1}{5}\begin{Bmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \longrightarrow \bar{b}(0) = \bar{b}_0 = \bar{t}_0 \wedge \bar{n}_0 = \frac{1}{5}\begin{Bmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{Bmatrix}.$$

Utilizando estos valores e imponiendo nuevamente $\dot{\bar{n}}(s) = -4\,\bar{t}(s) + 3\,\bar{b}(s)$ se obtiene

$$\bar{c} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix} \longrightarrow \bar{t}(s) = \frac{4}{5}\begin{Bmatrix} -\sin(5s) \\ \cos(5s) \\ (3/4) \end{Bmatrix}, \quad \bar{n}(s) = \begin{Bmatrix} -\cos(5s) \\ -\sin(5s) \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \bar{b}(s) = \frac{3}{5}\begin{Bmatrix} \sin(5s) \\ -\cos(5s) \\ (4/3) \end{Bmatrix}.$$

Finalmente,

$$\dot{\bar{r}} = \bar{t}(s) \quad \Longrightarrow \quad \bar{r} = \bar{\beta}(s) = \bar{\beta}(0) + \int_0^s \bar{t}(s)\,ds$$

y teniendo en cuenta el valor de $\bar{\beta}(0) = \bar{r}_0$, se obtiene

$$\bar{\beta}(s) = \frac{4}{25}\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{4}{25}\begin{Bmatrix} (\cos(5s) - 1) \\ \sin(5s) \\ (15/4)\,s \end{Bmatrix} \longrightarrow \boxed{\bar{\beta}(s) = \frac{4}{25}\begin{Bmatrix} \cos(5s) \\ \sin(5s) \\ (15/4)\,s \end{Bmatrix}},$$

que es la ecuación de una hélice.

14.– Se denominan curvas de Bertrand a aquellas curvas que tienen las mismas normales principales. Comprobar que los planos osculadores asociados a dos curvas de Bertrand se cortan bajo un ángulo constante.

SOLUCIÓN:

Sean $\bar{r} = \bar{\alpha}_1(t)$ y $\bar{r} = \bar{\alpha}_2(t)$ las ecuaciones paramétricas de dos curvas en función de un parámetro t, elegido convenientemente para poner en correspondencia los puntos de ambas curvas. Sean $\{\bar{t}_1(t), \bar{n}_1(t), \bar{b}_1(t)\}$ y $\{\bar{t}_2(t), \bar{n}_2(t), \bar{b}_2(t)\}$ los respectivos triedos de Frenet. Estas curvas se dicen de Bertrand si para estas parametrizaciones se cumple la condición

$$\bar{n}_1(t) = \bar{n}_2(t).$$

El ángulo con el que se cortan dos planos osculadores es igual al ángulo que forman las correspondientes binormales, que se puede expresar como

$$\cos(\theta) = \frac{\bar{b}_1 \cdot \bar{b}_2}{|\bar{b}_1|\,|\bar{b}_2|} = \bar{b}_1 \cdot \bar{b}_2.$$

Derivando la expresión anterior, se obtiene

$$-\sin(\theta)\,\theta' = \bar{b}_1' \cdot \bar{b}_2 + \bar{b}_1 \cdot \bar{b}_2'.$$

Pero

$$\begin{aligned}
\bar{b}_1' &= \frac{d\bar{b}_1}{dt} = \frac{d\bar{b}_1}{ds_1}\,\frac{ds_1}{dt} = -\tau_1\,\bar{n}_1\,\frac{ds_1}{dt} = -\tau_1\,s_1'\,\bar{n}_1, \\
\bar{b}_2' &= \frac{d\bar{b}_2}{dt} = \frac{d\bar{b}_2}{ds_2}\,\frac{ds_2}{dt} = -\tau_2\,\bar{n}_2\,\frac{ds_2}{dt} = -\tau_2\,s_2'\,\bar{n}_2.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
-\sin(\theta)\,\theta' = \Big(-\tau_1\,s_1'\,\bar{n}_1\Big) \cdot \bar{b}_2 + \bar{b}_1 \cdot \Big(-\tau_2\,s_2'\,\bar{n}_2\Big) &= \Big(-\tau_1\,s_1'\Big)\,\bar{n}_1 \cdot \bar{b}_2 + \Big(-\tau_2\,s_2'\Big)\,\bar{b}_1 \cdot \bar{n}_2 \\
&= \Big(-\tau_1\,s_1'\Big)\,\bar{n}_2 \cdot \bar{b}_2 + \Big(-\tau_2\,s_2'\Big)\,\bar{b}_1 \cdot \bar{n}_1 = 0,
\end{aligned}$$

lo que implica que θ es constante.

15.– Sea una curva tal que sus planos osculadores son tangentes a una esfera. Demostrar que sus planos rectificantes se cortan en un punto.

SOLUCIÓN:

Sea $\bar{r} = \bar{\beta}(s)$ la ecuación paramétrica de la curva en función del arco.
Si $\forall s$ se cumple que el plano osculador en $\bar{r} = \bar{\beta}(s)$ es tangente a una esfera de centro $\bar{r}_E$ y radio R, entonces se verifica

$$\bar{r}_E = \bar{\beta}(s) + \lambda(s)\,\bar{t}(s) + \mu(s)\,\bar{n}(s) + R\,\bar{b}(s).$$

Derivando la expresión anterior respecto al parámetro s se obtiene

$$\begin{aligned}
0 &= \dot{\bar{\beta}}(s) + \dot{\lambda}(s)\,\bar{t}(s) + \lambda(s)\,\dot{\bar{t}}(s) + \dot{\mu}(s)\,\bar{n}(s) + \mu(s)\,\dot{\bar{n}}(s) + R\,\dot{\bar{b}}(s) \\
&= \bar{t}(s) + \dot{\lambda}(s)\,\bar{t}(s) + \lambda(s)\,k(s)\,\bar{n}(s) + \dot{\mu}(s)\,\bar{n}(s) + \mu(s)\Big(-k(s)\,\bar{t}(s) + \tau(s)\,\bar{b}(s)\Big) - R\,\tau(s)\,\bar{n}(s).
\end{aligned}$$

Agrupando términos,

$$\Big(1 + \dot{\lambda}(s) - \mu(s)\,k(s)\Big)\,\bar{t}(s) + \Big(\lambda(s)\,k(s) + \dot{\mu}(s) - R\,\tau(s)\Big)\,\bar{n}(s) + \Big(\mu(s)\,\tau(s)\Big)\,\bar{b}(s) = 0.$$

Luego,

$$\begin{aligned} 1+\dot{\lambda}(s)-\mu(s)\,k(s) \quad &= 0,\\ \lambda(s)\,k(s)+\dot{\mu}(s)-R\,\tau(s) &= 0,\\ \mu(s)\,\tau(s) \quad &= 0. \end{aligned}$$

La última ecuación implica que $\tau(s)=0$ o $\mu(s)=0$. En el primer caso la curva es plana y sus planos rectificantes se cortan en el punto del infinito de la dirección perpendicular al plano. En el segundo, se verifica

$$\bar{r}_E=\bar{\beta}(s)+\lambda(s)\,\bar{t}(s)+R\,\bar{b}(s),$$

por lo que el centro de la esfera siempre pertenece al plano rectificante.
Se concluye que si todos los planos osculadores de una curva son tangentes a una esfera, todos los planos rectificantes se cortan en el punto del infinito de la binormal (si la curva es plana), o en el centro de la esfera (en el caso general).

Nota: Si $\mu(s)=0$, el sistema de ecuaciones anterior se reduce a

$$\begin{aligned} 1+\dot{\lambda}(s) \quad &= 0,\\ \lambda(s)\,k(s)-R\,\tau(s) &= 0, \end{aligned}$$

cuya solución es $\lambda(s)=-s+c$, $\lambda(s)=R\,\tau(s)/k(s)$. Por tanto, la curva debe satisfacer la condición $R\,\tau(s)/k(s)=(-s+c)$.

16.– Probar que si todas las tangentes a una curva pasan por un punto fijo, entonces la curva es una recta.

SOLUCIÓN:

Sea $\bar{r}=\bar{\beta}(s)$ la ecuación paramétrica de la curva en función del arco.
Si el punto $\bar{r}_p$ (fijo) pertenece a la recta tangente en $\bar{r}=\bar{\beta}(s)$ $\forall s$, entonces se verifica

$$\bar{r}_p=\bar{\beta}(s)+\lambda(s)\,\bar{t}(s).$$

Derivando la expresión anterior respecto al parámetro s se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{\bar{\beta}}(s)+\dot{\lambda}(s)\,\bar{t}(s)+\lambda(s)\,\dot{\bar{t}}(s)\\ &= \bar{t}(s)\ +\dot{\lambda}(s)\,\bar{t}(s)+\lambda(s)\,k(s)\,\bar{n}(s). \end{aligned}$$

Agrupando términos,

$$\Big(1+\dot{\lambda}(s)\Big)\,\bar{t}(s)+\Big(\lambda(s)\,k(s)\Big)\,\bar{n}(s)=0.$$

Luego,

$$\begin{aligned} 1+\dot{\lambda}(s) \ &= 0,\\ \lambda(s)\,k(s) &= 0. \end{aligned}$$

La solución de este sistema es $\lambda(s)=-s+c$, $k(s)=0$. Puesto que la curvatura se anula en todos los puntos, la curva es necesariamente una recta.

17.– Probar que una curva es plana si y sólo si sus planos osculadores pasan por un punto fijo.

SOLUCIÓN:

Sea $\bar{r} = \bar{\beta}(s)$ la ecuación paramétrica de la curva en función del arco.
Si el punto $\bar{r}_p$ (fijo) pertenece al plano osculador en $\bar{r} = \bar{\beta}(s)$ $\forall s$, entonces se verifica

$$\bar{r}_p = \bar{\beta}(s) + \lambda(s)\,\bar{t}(s) + \mu(s)\,\bar{n}(s).$$

Derivando la expresión anterior respecto al parámetro s se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{\bar{\beta}}(s) + \dot{\lambda}(s)\,\bar{t}(s) + \lambda(s)\,\dot{\bar{t}}(s) \qquad + \dot{\mu}(s)\,\bar{n}(s) + \mu(s)\,\dot{\bar{n}}(s) \\ &= \bar{t}(s) \ + \dot{\lambda}(s)\,\bar{t}(s) + \lambda(s)\,k(s)\,\bar{n}(s) + \dot{\mu}(s)\,\bar{n}(s) + \mu(s)\,\Big(-k(s)\,\bar{t}(s) + \tau(s)\,\bar{b}(s)\Big). \end{aligned}$$

Agrupando términos,

$$\Big(1 + \dot{\lambda}(s) - \mu(s)\,k(s)\Big)\,\bar{t}(s) + \Big(\lambda(s)\,k(s) + \dot{\mu}(s)\Big)\,\bar{n}(s) + \Big(\mu(s)\,\tau(s)\Big)\,\bar{b}(s) = 0.$$

Luego,

$$\begin{aligned} 1 + \dot{\lambda}(s) - \mu(s)\,k(s) &= 0, \\ \lambda(s)\,k(s) + \dot{\mu}(s) \qquad &= 0, \\ \mu(s)\,\tau(s) \qquad\qquad &= 0. \end{aligned}$$

La última ecuación implica que $\tau(s) = 0$ o $\mu(s) = 0$. En el primer caso la curva es plana. En el segundo, el sistema anterior se reduce a

$$\begin{aligned} 1 + \dot{\lambda}(s) \ &= 0, \\ \lambda(s)\,k(s) &= 0, \end{aligned}$$

cuya solución es $\lambda(s) = -s + c$, $k(s) = 0$, lo que implica que la curva también es plana en este caso (ya que se trata de una recta).
Se concluye que si todos los planos osculadores de una curva pasan por un punto fijo, la curva es necesariamente plana. La implicación en sentido contrario es trivial.

18.– Hallar la ecuación de la circunferencia situada en el plano OXY, con centro en la recta $4y - 4x - 7 = 0$ y que tenga el mayor orden de contacto con la parábola $y = x^2$ en el punto $P \equiv (1/2, 1/4)$. Indicar cuál es el orden del contacto entre ambas curvas.

SOLUCIÓN:

Ecuación de la circunferencia:

$$(\bar{r} - \bar{r}_c) \cdot (\bar{r} - \bar{r}_c) = R^2.$$

Condición de que pase por el punto P:

$$(\bar{r}_p - \bar{r}_c) \cdot (\bar{r}_p - \bar{r}_c) = R^2, \qquad \text{con} \quad \bar{r}_p = \begin{Bmatrix} 1/2 \\ 1/4 \end{Bmatrix}.$$

Luego,

$$(\bar{r} - \bar{r}_c) \cdot (\bar{r} - \bar{r}_c) - (\bar{r}_p - \bar{r}_c) \cdot (\bar{r}_p - \bar{r}_c) = 0.$$

Ecuación de la parábola:

$$y = x^2 \iff \bar{r} = \bar{\alpha}(t) = \begin{Bmatrix} t \\ t^2 \end{Bmatrix} \implies \bar{\alpha}'(t) = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2t \end{Bmatrix}, \ \bar{\alpha}''(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \end{Bmatrix}, \ \bar{\alpha}'''(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Se comprueba que $\bar{\alpha}(1/2) = \bar{r}_p$ y se define la función auxiliar

$$f(t) = \Big(\bar{\alpha}(t) - \bar{r}_c\Big) \cdot \Big(\bar{\alpha}(t) - \bar{r}_c\Big) - \Big(\bar{r_p} - \bar{r}_c\Big) \cdot \Big(\bar{r_p} - \bar{r}_c\Big)$$

cuyas derivadas son

$$\begin{aligned} f'\ (t) =& 2\Big(\bar{\alpha}(t) - \bar{r}_c\Big) \cdot \bar{\alpha}'\ (t), \\ f''\ (t) =& 2\Big(\bar{\alpha}(t) - \bar{r}_c\Big) \cdot \bar{\alpha}''\ (t) + 2\,\bar{\alpha}'(t) \cdot \bar{\alpha}'\ (t), \\ f'''(t) =& 2\Big(\bar{\alpha}(t) - \bar{r}_c\Big) \cdot \bar{\alpha}'''(t) + 6\,\bar{\alpha}'(t) \cdot \bar{\alpha}''(t). \end{aligned}$$

Se comprueba que $f(1/2) = 0$, pues $\bar{\alpha}(1/2) = \bar{r}_p$.
Falta por determinar el vector

$$\bar{r}_c = \begin{Bmatrix} x_c \\ y_c \end{Bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \text{2 condiciones:} \quad \begin{cases} \text{Centro en la recta } 4y - 4x - 7 = 0 & \Rightarrow \begin{bmatrix} -4 & 4 \end{bmatrix}\ \bar{r}_c = 7, \\ \text{Contacto de orden 1 (al menos)} & \Rightarrow f'(1/2) = 0. \end{cases}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -4 & 4 \end{bmatrix}\ \bar{r}_c &= 7, \\ \bar{\alpha}'(1/2)\ \cdot \bar{r}_c &= \bar{\alpha}'(1/2) \cdot \bar{r}_p, \end{aligned}$$

o, lo que es lo mismo,

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \bar{r}_c = \begin{Bmatrix} 7/4 \\ 3/4 \end{Bmatrix}.$$

En consecuencia,

$$\left.\begin{aligned} \bar{r}_c &= \begin{Bmatrix} -1/2 \\ 5/4 \end{Bmatrix} \\ R &= |\bar{r}_p - \bar{r}_c| = \sqrt{2} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \boxed{(x + 1/2)^2 + (y - 5/4)^2 = 2.}$$

Finalmente se comprueba que $f''(1/2) = 0$ y $f'''(1/2) = 12 \neq 0$, por lo que el contacto es estrictamente de orden 2.

Notas:

1) Se ha impuesto la condición de que el contacto sea de orden 1, pero en ningún momento se ha impuesto la condición de que el contacto sea de orden 2. Por ello, y con carácter general, en un problema de este tipo deberíamos esperar que el contacto fuese estrictamente de orden 1. En consecuencia, cabe decir que en este caso se ha obtenido un contacto de orden 2 de forma accidental. El motivo es que para la elección particular de los datos de este problema se cumple $f''(1/2) = 0$.

2) Por tratarse de un contacto de orden 2, la circunferencia obtenida tiene que ser la circunferencia osculatriz en el punto $\bar{r}_p$. Puede comprobarse que esto es así, efectivamente.