

1.- Sea una viga de longitud L y sección rectangular, de ancho b y canto c . Sea \bar{r}_0 el vector de posición de un punto material cualquiera de la viga, donde

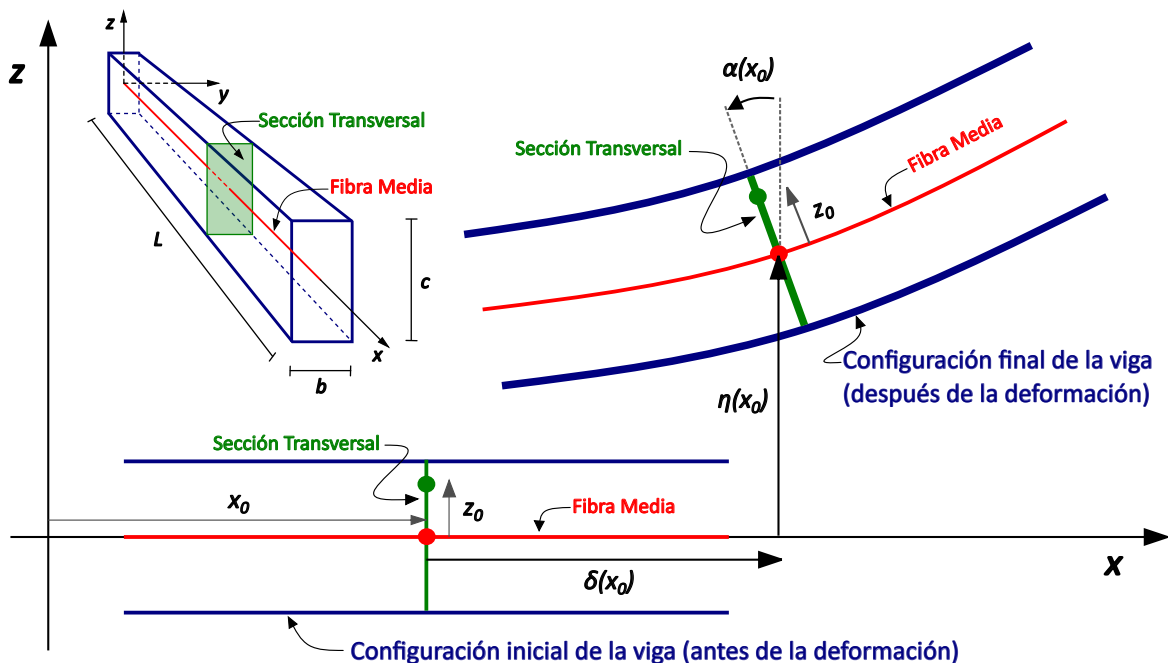
$$\bar{r}_0 = \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Bmatrix}, \quad \text{con } x_0 \in [0, L], \quad y_0 \in [-b/2, b/2], \quad z_0 \in [-c/2, c/2].$$

Se supone que para cada valor de $x_0 \in [0, L]$ la sección transversal (que es rectangular) de la viga permanece plana (Hipótesis de Navier) y experimenta los siguientes movimientos:

- 1) Se desplaza una distancia $\delta(x_0)$ a lo largo del eje X .
- 2) Se desplaza una distancia $\eta(x_0)$ a lo largo del eje Z .
- 3) Gira un ángulo $\alpha(x_0)$ (en radianes) en torno al eje Y .

Se pide:

- a) Describir el movimiento del punto material \bar{r}_0 en forma lagrangiana. Obtener el campo de desplazamientos.
- b) Calcular el tensor gradiente de movimientos \underline{F}_c , su determinante F_c y el tensor gradiente de desplazamientos \underline{J}_c . Interpretar su significado.
- c) Repetir los apartados anteriores introduciendo la hipótesis de que los desplazamientos son pequeños (esto es: $\delta(x_0) \ll L$, $\eta(x_0) \ll c$, $\alpha(x_0) \ll \pi/2$).



SOLUCIÓN:

a) Movimientos y desplazamientos en forma lagrangiana

Debido a los movimientos que se indican en el enunciado, el punto material que inicialmente se encontraba en la posición $\bar{r} = \bar{r}_0$ se habrá desplazado a su nueva posición

$$\bar{r} = \bar{r}_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0), \quad \text{donde} \quad \bar{r} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}, \quad \bar{r}_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0) = \begin{Bmatrix} x_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0) \\ y_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0) \\ z_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_0 + \delta(x_0) - z_0 \sin(\alpha(x_0)) \\ y_0 \\ \eta(x_0) + z_0 \cos(\alpha(x_0)) \end{Bmatrix}.$$

Si escribimos

$$\bar{r}_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0) = \bar{r}_0 + \bar{u}_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0),$$

el campo de desplazamientos viene dado en la forma

$$\bar{u} = \bar{u}_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0), \quad \text{donde} \quad \bar{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}, \quad \bar{u}_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0) = \begin{Bmatrix} u_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0) \\ v_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0) \\ w_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta(x_0) - z_0 \sin(\alpha(x_0)) \\ 0 \\ \eta(x_0) + z_0 (\cos(\alpha(x_0)) - 1) \end{Bmatrix}.$$

b) Tensor gradiente de movimientos y tensor gradiente de desplazamientos

El tensor gradiente de movimientos se expresa en la forma

$$\underline{F}_{\mathcal{L}} = \left[\frac{\partial \bar{r}_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0, t)}{\partial \bar{r}_0} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_{\mathcal{L}}(r_0, t)}{\partial x_0} & \frac{\partial x_{\mathcal{L}}(r_0, t)}{\partial y_0} & \frac{\partial x_{\mathcal{L}}(r_0, t)}{\partial z_0} \\ \frac{\partial y_{\mathcal{L}}(r_0, t)}{\partial x_0} & \frac{\partial y_{\mathcal{L}}(r_0, t)}{\partial y_0} & \frac{\partial y_{\mathcal{L}}(r_0, t)}{\partial z_0} \\ \frac{\partial z_{\mathcal{L}}(r_0, t)}{\partial x_0} & \frac{\partial z_{\mathcal{L}}(r_0, t)}{\partial y_0} & \frac{\partial z_{\mathcal{L}}(r_0, t)}{\partial z_0} \end{bmatrix},$$

luego

$$\underline{F}_{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} (1 + \delta'(x_0) - z_0 \cos(\alpha(x_0)) \alpha'(x_0)) & 0 & -\sin(\alpha(x_0)) \\ 0 & 1 & 0 \\ (\eta'(x_0) - z_0 \sin(\alpha(x_0)) \alpha'(x_0)) & 0 & \cos(\alpha(x_0)) \end{bmatrix},$$

cuyo determinante es

$$F_{\mathcal{L}} = \det(\underline{F}_{\mathcal{L}}) = (1 + \delta'(x_0)) \cos(\alpha(x_0)) + \eta'(x_0) \sin(\alpha(x_0)) - z_0 \alpha'(x_0).$$

El tensor gradiente de desplazamientos se expresa en la forma

$$\underline{J}_{\mathcal{L}} = \left[\frac{\partial \bar{u}_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0, t)}{\partial \bar{r}_0} \right] = \underline{F}_{\mathcal{L}} - \underline{I},$$

y, por tanto,

$$\underline{J}_{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} (\delta'(x_0) - z_0 \cos(\alpha(x_0)) \alpha'(x_0)) & 0 & -\sin(\alpha(x_0)) \\ 0 & 0 & 0 \\ (\eta'(x_0) - z_0 \sin(\alpha(x_0)) \alpha'(x_0)) & 0 & (\cos(\alpha(x_0)) - 1) \end{bmatrix}.$$

Los tensores gradiente de movimientos y gradiente de desplazamientos permiten calcular qué cambios experimenta un vector material (que une dos puntos inicialmente cercanos) debido a los movimientos que se han producido.

Así, dado un vector material cualquiera

$$\delta \bar{r}_0 = \begin{Bmatrix} \delta x_0 \\ \delta y_0 \\ \delta z_0 \end{Bmatrix},$$

que une dos puntos cercanos en la configuración inicial, el vector que une los mismos puntos después de haberse producido los movimientos puede expresarse en la forma

$$\delta \bar{r} = \underline{F}_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0, t) \delta \bar{r}_0 + \mathcal{O}(\|\delta \bar{r}_0\|^2)$$

en función del tensor gradiente de movimientos, o

$$\delta \bar{r} = (\underline{I} + \underline{J}_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0, t)) \delta \bar{r}_0 + \mathcal{O}(\|\delta \bar{r}_0\|^2) = \delta \bar{r}_0 + \underline{J}_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0, t) \delta \bar{r}_0 + \mathcal{O}(\|\delta \bar{r}_0\|^2).$$

en función del tensor gradiente de desplazamientos.

Por tanto,

$$\delta \bar{r} = \delta \bar{r}_0 + \begin{Bmatrix} \left(\delta'(x_0) - z_0 \cos(\alpha(x_0)) \alpha'(x_0) \right) \delta x_0 - \sin(\alpha(x_0)) \delta z_0 \\ 0 \\ \left(\eta'(x_0) - z_0 \sin(\alpha(x_0)) \alpha'(x_0) \right) \delta x_0 + \left(\cos(\alpha(x_0)) - 1 \right) \delta z_0 \end{Bmatrix}.$$

Se observa que la componente del vector material en la dirección del eje Y se mantiene constante, por lo que no hay deformaciones en esa dirección, y que la relación entre $\delta \bar{r}$ y $\delta \bar{r}_0$ no depende de la coordenada y_0 , por lo que el valor de esta coordenada es indiferente y el problema es bidimensional.

El determinante del tensor gradiente de movimientos $F_{\mathcal{L}}$ indica cómo cambia el volumen en el entorno de cada punto material debido a los movimientos: si $F_{\mathcal{L}} > 1$ se produce localmente una expansión; si $F_{\mathcal{L}} < 1$ se produce localmente una contracción; si $F_{\mathcal{L}} = 1$ el volumen no cambia localmente.

c) Hipótesis de pequeños desplazamientos

Cuando los desplazamientos son pequeños (esto es: $\delta(x_0) \ll L$, $\eta(x_0) \ll c$, $\alpha(x_0) \ll \pi/2$) se pueden realizar las aproximaciones

$$\sin(\alpha(x_0)) \approx \alpha(x_0) \quad (\text{con } \alpha(x_0) \text{ en radianes}), \quad \cos(\alpha(x_0)) \approx 1.$$

Por tanto,

$$\underline{F}_{\mathcal{L}} \approx \begin{bmatrix} (1 + \delta'(x_0) - z_0 \alpha'(x_0)) & 0 & -\alpha(x_0) \\ 0 & 1 & 0 \\ (\eta'(x_0) - z_0 \alpha(x_0) \alpha'(x_0)) & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

cuyo determinante es

$$F_{\mathcal{L}} \approx (1 + \delta'(x_0)) + \eta'(x_0) \alpha(x_0) - z_0 \alpha'(x_0).$$

Además,

$$\underline{J}_{\mathcal{L}} \approx \begin{bmatrix} (\delta'(x_0) - z_0 \alpha'(x_0)) & 0 & -\alpha(x_0) \\ 0 & 0 & 0 \\ (\eta'(x_0) - z_0 \alpha(x_0) \alpha'(x_0)) & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

En la teoría clásica de vigas sometidas a flexión (o de Euler–Bernouilli) en Resistencia de Materiales se adopta también la simplificación de que las secciones transversales se mantienen perpendiculares a la deformada del eje de la viga, lo que equivale a decir que $\alpha(x_0) \approx \text{tg}(\alpha(x_0)) \approx \eta'(x_0)$. Si además se desprecian los términos de segundo orden, se obtiene

$$\underline{F}_{\mathcal{L}} \approx \begin{bmatrix} (1 + \delta'(x_0) - z_0 \eta''(x_0)) & 0 & -\eta'(x_0) \\ 0 & 1 & 0 \\ \eta'(x_0) (1 - z_0 \eta''(x_0)) & 0 & 1 \end{bmatrix}, \approx \begin{bmatrix} (1 + \delta'(x_0) - z_0 \eta''(x_0)) & 0 & -\eta'(x_0) \\ 0 & 1 & 0 \\ \eta'(x_0) & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$F_{\mathcal{L}} \approx (1 + \delta'(x_0)) + (\eta'(x_0))^2 - z_0 \eta''(x_0) \approx 1 + \delta'(x_0) - z_0 \eta''(x_0)$$

y

$$\tilde{J}_{\mathcal{L}} \approx \begin{bmatrix} (\delta'(x_0) - z_0 \eta''(x_0)) & 0 & -\eta'(x_0) \\ 0 & 0 & 0 \\ \eta'(x_0) & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

En consecuencia,

$$\delta \bar{r} \approx \delta \bar{r}_0 + \left\{ \begin{array}{l} (\delta'(x_0) - z_0 \eta''(x_0)) \delta x_0 - \eta'(x_0) \delta z_0 \\ 0 \\ \eta'(x_0) \delta x_0 \end{array} \right\}.$$

Como se verá en el tema 3 (Espacios Euclídeos) la expresión anterior indica que el vector $\delta \bar{r}$ se obtiene a partir del vector $\delta \bar{r}_0$ mediante una deformación infinitesimal en la dirección del eje X de valor

$$\varepsilon_x = (\delta'(x_0) - z_0 \eta''(x_0))$$

y una rotación infinitesimal en torno al eje Y de valor $(-\eta'(x_0))$.

2.- Sea una tubería cilíndrica de longitud indefinida y sección circular de radio R que se encuentra llena de un fluido en movimiento. El eje de la tubería se orienta a lo largo del eje Z . Sea \bar{r} el vector de posición de un punto cualquiera del interior de la tubería, donde

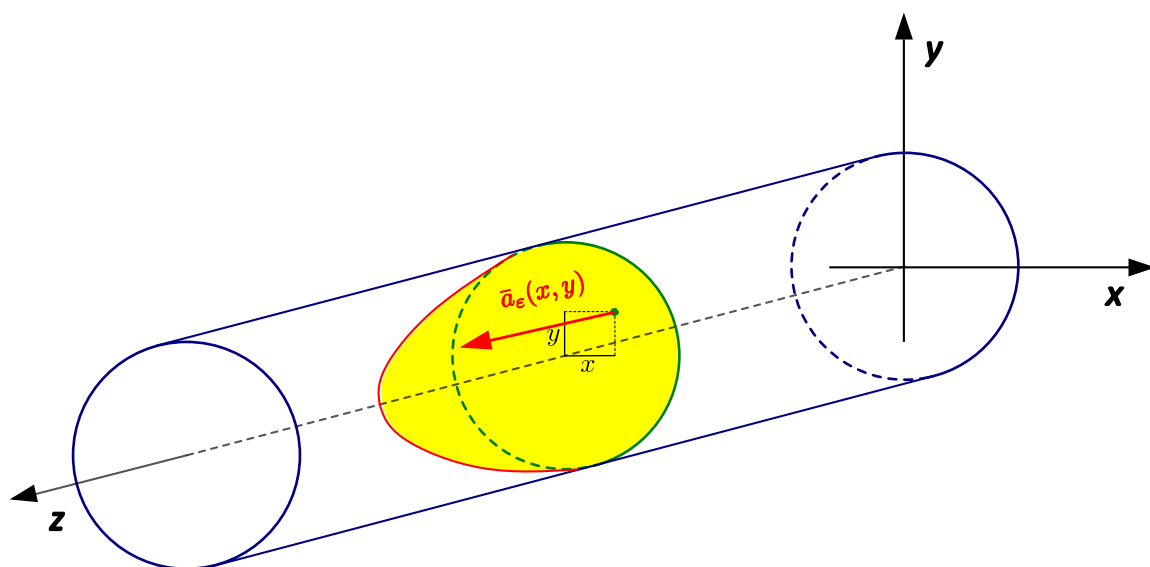
$$\bar{r} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}, \quad \text{con } x^2 + y^2 \leq R^2, \quad z \in (-\infty, \infty).$$

Se supone que el fluido se mueve en régimen laminar, de forma que la velocidad del fluido en el punto \bar{r} y en el instante de tiempo t viene dada por la expresión

$$\bar{a}_\varepsilon(\bar{r}, t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ (1 - (x^2 + y^2)/R^2) v_{\max} \end{Bmatrix}, \quad \text{donde } v_{\max} = \frac{2Q}{\pi R^2}.$$

Se pide:

- Demostrar que Q es el caudal (volumen de fluido que atraviesa una sección transversal de la tubería por unidad de tiempo).
- Describir el movimiento de las partículas del fluido en forma lagrangiana, esto es mediante una expresión del tipo $\bar{r} = \bar{r}_\varepsilon(\bar{r}_0, t)$. Obtener el campo de desplazamientos. Calcular la velocidad de la partícula y verificar su compatibilidad con el campo espacial de velocidades en forma euleriana.
- Calcular el tensor gradiente de movimientos $\underline{F}_\varepsilon$, su determinante F_ε y el tensor gradiente de desplazamientos $\underline{J}_\varepsilon$. Interpretar su significado.
- Calcular la derivada temporal del tensor gradiente de movimientos y verificar que coincide con la derivada espacial del campo de velocidades en forma lagrangiana.
- Calcular el tensor gradiente de velocidad $\underline{\ell}$ utilizando las descripciones lagrangiana y euleriana y comprobar que el resultado es el mismo en los dos casos.



SOLUCIÓN:

a) Demostrar que Q es el caudal

Sea $\Omega = \{(x, y, z)/x^2 + y^2 \leq R^2\}$ una sección transversal cualquiera de la tubería.

El volumen de fluido que atraviesa un elemento diferencial de esta sección por unidad de tiempo es

$$dV = \left((\bar{a}_\varepsilon(\bar{r}, t) dt) \cdot \bar{n} \right) dA, \quad \bar{n} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad dA = dx dy,$$

donde $(\bar{a}_\varepsilon(\bar{r}, t) dt)$ es el lado del tubo de fluido que atraviesa el elemento diferencial de sección, \bar{n} es el vector normal a la sección y dA es la diferencial de área del elemento.

Por tanto, el caudal (volumen por unidad de tiempo) que atraviesa el elemento diferencial es

$$dQ = \frac{dV}{dt} = (\bar{a}_\varepsilon(\bar{r}, t) \cdot \bar{n}) dA = (1 - (x^2 + y^2)/R^2) v_{\max} dA.$$

En consecuencia, el caudal que atraviesa la sección puede expresarse mediante la integral de área

$$Q = \int \int_{\Omega} (1 - (x^2 + y^2)/R^2) v_{\max} dA,$$

que puede evaluarse, por ejemplo, resolviendo la integral doble en cartesianas

$$Q = v_{\max} \int_{x=-R}^{x=R} \int_{y=-\sqrt{R^2-x^2}}^{y=\sqrt{R^2-x^2}} (1 - (x^2 + y^2)/R^2) dy dx.$$

Resulta más sencillo resolver la integral doble equivalente en polares

$$\begin{aligned} Q &= v_{\max} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left(\int_{\rho=0}^{\rho=R} (1 - \rho^2/R^2) \rho d\rho \right) d\theta \\ &= v_{\max} (R^2/4) 2\pi. \end{aligned}$$

Se comprueba que, efectivamente,

$$Q = v_{\max} \frac{\pi R^2}{2} \iff v_{\max} = \frac{2Q}{\pi R^2},$$

por lo que el valor de Q que se indica en el enunciado es el caudal.

b) Descripción lagrangiana

Sea la partícula que inicialmente se encuentra en la posición

$$\bar{r} = \bar{r}_0 = \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Bmatrix}, \quad \text{con} \quad x_0^2 + y_0^2 \leq R^2, \quad z_0 \in (-\infty, \infty),$$

cuya posición a lo largo del tiempo viene dada por la expresión

$$\bar{r} = \bar{r}_\varepsilon(\bar{r}_0, t)$$

que hay que determinar.

Derivando esta expresión se obtiene la velocidad de esta partícula en el instante de tiempo t en la forma

$$\bar{a}_\varepsilon(\bar{r}_0, t) = \frac{\partial \bar{r}_\varepsilon(\bar{r}_0, t)}{\partial t}.$$

Se sabe que la relación entre la velocidad de la partícula $\bar{a}_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0, t)$ y el campo espacial de velocidades en forma euleriana $\bar{a}_{\varepsilon}(\bar{r}, t)$ se expresa mediante la ecuación

$$\bar{a}_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0, t) = \bar{a}_{\varepsilon}(\bar{r}, t) \Big|_{\bar{r}=\bar{r}_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0, t)}.$$

Por tanto, la posición de esta partícula a lo largo del tiempo $\bar{r}_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0, t)$ será la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{\partial \bar{r}_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0, t)}{\partial t} = \bar{a}_{\varepsilon}(\bar{r}, t) \Big|_{\bar{r}=\bar{r}_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0, t)}$$

con la condición inicial

$$\bar{r}_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0, 0) = \bar{r}_0.$$

La velocidad inicial de esta partícula será

$$\bar{a}_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0, 0) = \bar{a}_{\varepsilon}(\bar{r}, 0) \Big|_{\bar{r}=\bar{r}_0} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ (1 - (x_0^2 + y_0^2)/R^2) v_{\max} \end{Bmatrix}.$$

En este caso el campo espacial de velocidades no depende del tiempo, es paralelo al eje de la tubería y su módulo sólo depende de la distancia al eje. Teniendo en cuenta que la sección de la tubería es constante y que el campo de velocidades es el mismo en todas las secciones, parece claro que las partículas de fluido se desplazan a lo largo de líneas rectas paralelas al eje Z y con una velocidad constante que sólo depende de su distancia al eje de la tubería. Por tanto,

$$\bar{r}_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0, t) = \bar{r}_0 + \bar{a}(\bar{r}_0, 0) t.$$

Desarrollando la expresión anterior se obtiene

$$\bar{r}_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0, t) = \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 + (1 - (x_0^2 + y_0^2)/R^2) v_{\max} t \end{Bmatrix}.$$

En estas condiciones, la velocidad de la partícula puede expresarse en la forma

$$\bar{a}_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0, t) = \frac{\partial \bar{r}_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0, t)}{\partial t} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ (1 - (x_0^2 + y_0^2)/R^2) v_{\max} \end{Bmatrix}.$$

Se comprueba fácilmente que las expresiones anteriores verifican la ecuación diferencial y la condición inicial indicadas anteriormente, por lo que la expresión obtenida para la velocidad de la partícula es compatible con la del campo espacial de velocidades en forma euleriana.

c) Tensor gradiente de movimientos y tensor gradiente de desplazamientos

El tensor gradiente de movimientos se expresa en la forma

$$\underline{\underline{F}}_{\mathcal{L}} = \left[\frac{\partial \bar{r}_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0, t)}{\partial \bar{r}_0} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_{\mathcal{L}}(r_0, t)}{\partial x_0} & \frac{\partial x_{\mathcal{L}}(r_0, t)}{\partial y_0} & \frac{\partial x_{\mathcal{L}}(r_0, t)}{\partial z_0} \\ \frac{\partial y_{\mathcal{L}}(r_0, t)}{\partial x_0} & \frac{\partial y_{\mathcal{L}}(r_0, t)}{\partial y_0} & \frac{\partial y_{\mathcal{L}}(r_0, t)}{\partial z_0} \\ \frac{\partial z_{\mathcal{L}}(r_0, t)}{\partial x_0} & \frac{\partial z_{\mathcal{L}}(r_0, t)}{\partial y_0} & \frac{\partial z_{\mathcal{L}}(r_0, t)}{\partial z_0} \end{bmatrix}$$

donde

$$\bar{r}_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0, t) = \begin{Bmatrix} x_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0, t) \\ y_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0, t) \\ z_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0, t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 + (1 - (x_0^2 + y_0^2)/R^2) v_{\max} t \end{Bmatrix}.$$

Luego

$$\underline{\tilde{F}}_{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2(x_0/R^2)v_{\max}t & -2(y_0/R^2)v_{\max}t & 1 \end{bmatrix},$$

cuyo determinante es

$$F_{\mathcal{L}} = \det(\underline{\tilde{F}}_{\mathcal{L}}) = 1.$$

El tensor gradiente de desplazamientos se expresa en la forma

$$\underline{\mathcal{J}}_{\mathcal{L}} = \left[\frac{\partial \bar{u}_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0, t)}{\partial \bar{r}_0} \right] = \underline{\tilde{F}}_{\mathcal{L}} - \underline{I},$$

luego

$$\underline{\mathcal{J}}_{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2(x_0/R^2)v_{\max}t & -2(y_0/R^2)v_{\max}t & 0 \end{bmatrix},$$

Los tensores gradiente de movimientos y gradiente de desplazamientos permiten calcular qué cambios experimenta un vector material (que une dos puntos inicialmente cercanos) debido a los movimientos que se han producido.

Así, para cualquier vector material $\delta \bar{r}_0$ que une dos puntos inicialmente cercanos, el vector que une los mismos puntos después de haberse producido los movimientos puede expresarse en la forma

$$\delta \bar{r} = \underline{\tilde{F}}_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0, t) \delta \bar{r}_0 + \mathcal{O}(\|\delta \bar{r}_0\|^2)$$

en función del tensor gradiente de movimientos, o

$$\delta \bar{r} = (\underline{I} + \underline{\mathcal{J}}_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0, t)) \delta \bar{r}_0 + \mathcal{O}(\|\delta \bar{r}_0\|^2) = \delta \bar{r}_0 + \underline{\mathcal{J}}_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0, t) \delta \bar{r}_0 + \mathcal{O}(\|\delta \bar{r}_0\|^2).$$

Luego en este caso, dado un vector material cualquiera

$$\delta \bar{r}_0 = \begin{Bmatrix} \delta x_0 \\ \delta y_0 \\ \delta z_0 \end{Bmatrix},$$

su expresión después de producirse los movimientos será

$$\delta \bar{r} = \delta \bar{r}_0 + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2v_{\max}/R^2(x_0 \delta x_0 + y_0 \delta y_0)t \end{Bmatrix}.$$

Por tanto, dos partículas inicialmente cercanas mantendrán sus posiciones relativas en las direcciones de los ejes X e Y mientras que se separarán gradualmente en la dirección del eje Z . La ratio a la que separan las partículas en la dirección del eje Z es constante y crece linealmente a medida que aumenta la distancia al eje de la tubería, donde es nula.

El determinante del tensor gradiente de movimientos indica el cambio de volumen que se produce en el fluido en el entorno de cada partícula debido a los movimientos. En este caso $F_{\mathcal{L}} = 1$, lo que indica que el fluido no experimenta cambios de volumen, lo que es característico de los fluidos incompresibles (como la mayor parte de los líquidos).

d) Derivada temporal de $\underline{\tilde{F}}_{\mathcal{L}}$ y derivada espacial de $\bar{a}_{\mathcal{L}}$

Derivando el tensor gradiente de movimientos $\underline{\tilde{F}}_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0, t)$ respecto a t se obtiene

$$\frac{\partial \underline{\tilde{F}}_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0, t)}{\partial t} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2(x_0/R^2)v_{\max} & -2(y_0/R^2)v_{\max} & 0 \end{bmatrix}.$$

Derivando el campo de velocidades en forma lagrangiana $\bar{a}_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0, t)$ respecto a \bar{r}_0 se obtiene

$$\frac{\partial \bar{a}_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0, t)}{\partial \bar{r}_0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2(x_0/R^2)v_{\max} & -2(y_0/R^2)v_{\max} & 0 \end{bmatrix},$$

Se comprueba que los resultados coinciden.

e) Tensor gradiente de velocidad $\underline{\ell}$

Invirtiendo la expresión del tensor gradiente de movimientos se obtiene

$$\tilde{F}_{\mathcal{L}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2(x_0/R^2)v_{\max}t & 2(y_0/R^2)v_{\max}t & 1 \end{bmatrix}.$$

En forma lagrangiana el tensor gradiente de velocidad se expresa como

$$\begin{aligned} \underline{\ell}_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0, t) &= \left[\frac{\partial \tilde{F}_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0, t)}{\partial t} \right] \tilde{F}_{\mathcal{L}}^{-1}(\bar{r}_0, t) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2(x_0/R^2)v_{\max} & -2(y_0/R^2)v_{\max} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2(x_0/R^2)v_{\max}t & 2(y_0/R^2)v_{\max}t & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2(x_0/R^2)v_{\max} & -2(y_0/R^2)v_{\max} & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

En forma euleriana el tensor gradiente de velocidad se expresa como

$$\begin{aligned} \underline{\ell}_{\mathcal{E}}(\bar{r}, t) &= \left[\frac{\partial \bar{a}_{\mathcal{E}}(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}} \right] \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2(x/R^2)v_{\max} & -2(y/R^2)v_{\max} & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Se comprueba fácilmente que

$$\underline{\ell}_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0, t) = \underline{\ell}_{\mathcal{E}}(\bar{r}, t) \Big|_{\bar{r}=\bar{r}_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0, t)}.$$

- 3.– Un vehículo circula sobre el tablero biapoyado de un puente de longitud L con velocidad horizontal $a =$ constante. A su vez, el tablero vibra verticalmente, de forma que el desplazamiento vertical de la sección situada a una distancia $x \in [0, L]$ del apoyo izquierdo viene dado por la expresión

$$w = w_{\max} \operatorname{sen} \left(\pi \frac{x}{L} \right) \operatorname{sen}(\omega t) \quad \text{con} \quad \omega = \frac{\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}},$$

donde w_{\max} es la amplitud máxima de la vibración en el centro del vano y ω es la frecuencia angular (en rad/s) que se expresa en función del módulo de elasticidad E y la densidad ρ del material y del momento de inercia I y el área A de la sección transversal del tablero.

Se pide:

- Calcular la velocidad vertical de un punto cualquiera del tablero en el instante de tiempo t .
- Calcular la velocidad vertical que experimenta el vehículo en su recorrido en el instante de tiempo t .
- Establecer la relación de los dos valores anteriores con el campo espacial de velocidades en una descripción euleriana y la velocidad de la partícula en una descripción lagrangiana.

SOLUCIÓN:

a) Velocidad vertical de un punto del tablero

La función que describe el desplazamiento vertical del punto x de la superficie del tablero en el tiempo t es

$$w_{\text{T}}(x, t) = w_{\max} \operatorname{sen} \left(\pi \frac{x}{L} \right) \operatorname{sen}(\omega t), \quad x \in [0, L].$$

Por tanto, la velocidad vertical del punto x de la superficie del tablero en el tiempo t es

$$\frac{\partial w_{\text{T}}(x, t)}{\partial t} = w_{\max} \operatorname{sen} \left(\pi \frac{x}{L} \right) \cos(\omega t) \omega, \quad x \in [0, L].$$

b) Velocidad vertical del vehículo

En el mundo real el contacto del vehículo con el tablero se realiza a través de las ruedas de todos sus ejes. La unión de cada rueda a su eje se realiza mediante la suspensión y está dotada de amortiguación. A su vez, las ruedas (y especialmente los neumáticos) son flexibles y en determinadas circunstancias pueden perder el contacto con el pavimento. Además, las piezas que conforman el vehículo no son sólidos rígidos sino que pueden deformarse. Y aunque el cuerpo del vehículo no experimente balanceo (inclinación lateral) ni guiñada (giro a derecha o izquierda), los desiguales desplazamientos verticales del tablero en la zona de cada uno de los ejes provocarán en general cabeceo (inclinación hacia adelante o hacia atrás). Por todo ello, obtener el desplazamiento vertical del vehículo a partir de los desplazamientos verticales del tablero no es en absoluto trivial.

Para realizar los cálculos se desprecia el comportamiento tenso-deformacional de las piezas del vehículo así como la flexibilidad de los neumáticos y el efecto de la suspensión. Todo ello equivale a considerar que el vehículo en su conjunto se comporta como un sólido rígido. Si además se desprecia la distancia entre ejes puede ignorarse el cabeceo. De esta forma, se considera que el vehículo en su conjunto se comporta como una partícula, lo que permite aproximar su desplazamiento vertical tomando el del punto del tablero sobre el que está pasando el eje delantero, el eje trasero, el centro de gravedad o cualquier otro punto que se considere representativo del vehículo.

Teniendo en cuenta lo anterior, sea un vehículo que inicialmente (es decir: en $t = 0$) se encuentra en el punto $x = x_0$. En el instante t el vehículo se encontrará en la posición

$$x = x_0 + at.$$

En consecuencia, la función que describe el desplazamiento vertical del vehículo en el tiempo t es

$$w_V(x_0, t) = \begin{cases} w_T(x, t)|_{x=x_0+at} = w_{\max} \operatorname{sen} \left(\pi \frac{x_0 + at}{L} \right) \operatorname{sen}(\omega t), & x_0 + at \in [0, L], \\ 0, & x_0 + at \notin [0, L]. \end{cases}$$

Por tanto, la velocidad vertical del vehículo en el tiempo t es

$$\frac{\partial w_V(x_0, t)}{\partial t} = \begin{cases} w_{\max} \left(\operatorname{sen} \left(\pi \frac{x_0 + at}{L} \right) \cos(\omega t) \omega + \right. \\ \left. \cos \left(\pi \frac{x_0 + at}{L} \right) \sin(\omega t) \left(\pi \frac{a}{L} \right) \right), & x_0 + at \in [0, L], \\ 0, & x_0 + at \notin [0, L]. \end{cases}$$

c) Relación con descripciones lagrangiana y euleriana

Sea la magnitud ψ el desplazamiento vertical.

La función $w_T(x, t)$ describe el valor de esta magnitud en forma euleriana, ya que proporciona su valor en cada instante de tiempo t para cada punto del espacio x . Por tanto, podemos escribir

$$\psi = \psi_\varepsilon(x, t) = w_T(x, t).$$

La función $w_V(x_0, t)$ describe el valor de esta magnitud en forma lagrangiana, ya que proporciona su valor en cada instante de tiempo t para la partícula (el vehículo) cuya posición inicial era x_0 . Por tanto, podemos escribir

$$\psi = \psi_\varepsilon(x_0, t) = w_V(x_0, t).$$

Por tanto,

$$\frac{\partial \psi_\varepsilon(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial w_T(x, t)}{\partial t}, \quad \frac{\partial \psi_\varepsilon(x_0, t)}{\partial t} = \frac{\partial w_V(x_0, t)}{\partial t}.$$

La función $x_\varepsilon(x_0, t)$ describe la posición en cada instante de tiempo t de la partícula (el vehículo) cuya posición inicial era x_0 . Por tanto, podemos escribir

$$x = x_\varepsilon(x_0, t) = x_0 + u_\varepsilon(x_0, t), \quad \text{con} \quad x_\varepsilon(x_0, t) = x_0 + at, \quad u_\varepsilon(x_0, t) = at.$$

En consecuencia la velocidad (horizontal) de la partícula es

$$a_\varepsilon(x_0, t) = \frac{\partial x_\varepsilon(x_0, t)}{\partial t} = \frac{\partial u_\varepsilon(x_0, t)}{\partial t} = a,$$

y resulta trivial comprobar que el campo euleriano de velocidades (horizontales) viene dado por

$$a_\varepsilon(x, t) = a$$

y que se verifica

$$a_\varepsilon(x_0, t) = a_\varepsilon(x, t)|_{x=x_\varepsilon(x_0, t)}.$$

Obviamente, la relación entre las descripciones euleriana y lagrangiana de la magnitud ψ es equivalente a la relación entre las expresiones de la velocidad vertical del tablero y la velocidad vertical del vehículo esto es,

$$\psi_\varepsilon(x, t)|_{x=x_\varepsilon(x_0, t)} = \psi_\varepsilon(x_0, t) \quad \iff \quad w_T(x, t)|_{x=x_0+at} = w_V(x_0, t),$$

y la expresión desarrollada en el apartado b) para la velocidad vertical del vehículo podría haberse obtenido mediante la (mal llamada) derivada material

$$\frac{\partial \psi_{\mathcal{L}}}{\partial t} = \left[\frac{\partial \psi_{\varepsilon}}{\partial t} + \frac{\partial \psi_{\varepsilon}}{\partial x} a_{\varepsilon} \right] \Big|_{x=x_{\mathcal{L}}(x_0, t)},$$

en la forma

$$\frac{\partial w_{\mathcal{V}}(x_0, t)}{\partial t} = \left[\frac{\partial w_{\Gamma}(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial w_{\Gamma}(x, t)}{\partial x} a \right] \Big|_{x=x_0+at}.$$

Efectivamente, teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_{\Gamma}(x, t)}{\partial t} &= w_{\max} \operatorname{sen} \left(\pi \frac{x}{L} \right) \cos(\omega t) \omega, \\ \frac{\partial w_{\Gamma}(x, t)}{\partial x} &= w_{\max} \cos \left(\pi \frac{x}{L} \right) \sin(\omega t) \left(\pi \frac{1}{L} \right), \end{aligned}$$

se comprueba fácilmente que

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_{\mathcal{V}}(x_0, t)}{\partial t} &= \left[w_{\max} \operatorname{sen} \left(\pi \frac{x}{L} \right) \cos(\omega t) \omega + \right. \\ &\quad \left. w_{\max} \cos \left(\pi \frac{x}{L} \right) \sin(\omega t) \left(\pi \frac{1}{L} \right) a \right] \Big|_{x=x_0+at \in [0, L]}, \end{aligned}$$

que efectivamente produce el mismo resultado que se obtuvo en el apartado b).