FUNDAMENTOS DE MECÁNICA COMPUTACIONAL **Curso 2023/2024**

Práctica 7: ANÁLISIS TENSORIAL Y TEORÍA DE CAMPOS (15/12/2023)

1.– Demostrar, utilizando coordenadas cartesianas ortonormales, las siguientes expresiones:

a) $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{grad}}\,(f)\right) = \vec{0}$.

b) $\text{div}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\left(\vec{f}\right)\right) = 0$.

c) $\Delta f = \text{div}\left(\overrightarrow{\text{grad}}\,(f)\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

2.– Demostrar, utilizando coordenadas curvilíneas generales, las siguientes expresiones:

a) $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{grad}}\,(f)\right) = \vec{0}$.

b) $\text{div}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\left(\vec{f}\right)\right) = 0$.

c) $\Delta f = \text{div}\left(\overrightarrow{\text{grad}}\,(f)\right) = \dfrac{1}{\sqrt{g}}\ \dfrac{\partial}{\partial u^i}\ \left(\sqrt{g}\ \ g^{ij}\ \ \dfrac{\partial f}{\partial u^j}\right)$.

Comprobar que la expresión general del Laplaciano se reduce a la del ejercicio anterior cuando las coordenadas son cartesianas ortonormales.

3.– Sea el campo vectorial $\vec{f}(\bar{r}) = r^a\,\vec{r}$, donde $r = |\vec{r}\,|$, $\vec{r}$ es el vector de posición y $a \in \mathbb{R}$ es una constante. Se pide:

a) Calcular los valores de a que hacen que el campo vectorial sea solenoidal.

b) Calcular los valores de a que hacen que el campo vectorial sea irrotacional.

4.– Sea el campo vectorial $\vec{f}(\bar{r}) = f(r)\ (\vec{r}/r)$, donde $f(r)$ es una función escalar cualquiera, $r = |\vec{r}\,|$ y $\vec{r}$ es el vector de posición. Demostrar que el campo vectorial $\vec{f}(\bar{r})$ es irrotacional.

5.– Sea el sistema de coordenadas curvilíneas (cilíndricas) definidas por la transformación

$$\bar{r} = \bar{\Psi}(\bar{u}), \qquad \text{donde} \quad \bar{r} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}, \quad \bar{u} = \begin{Bmatrix} \rho \\ \theta \\ z \end{Bmatrix}, \quad \bar{\Psi}(\bar{u}) = \begin{Bmatrix} \rho\,\cos(\theta) \\ \rho\,\text{sen}(\theta) \\ z \end{Bmatrix}$$

y sean el campo escalar $f(\bar{u}) = f(\rho, \theta, z)$ y el campo vectorial

$$\vec{f}(\bar{u}) = \vec{h}_\rho\ f^\rho(\rho, \theta, z) + \vec{h}_\theta\ f^\theta(\rho, \theta, z) + \vec{h}_z\ f^z(\rho, \theta, z).$$

Se pide:

a) Obtener la base natural, la base dual y la base normalizada.

b) Obtener la expresión del gradiente del campo escalar $f(\rho, \theta, z)$ en la base dual. Reescribir la expresión anterior en las bases natural y normalizada.

c) Obtener la expresión de la divergencia del campo vectorial $\vec{f}(\rho, \theta, z)$.

d) Obtener la expresión del rotacional del campo vectorial $\vec{f}(\rho, \theta, z)$ en la base natural. Reescribir la expresión anterior en las bases dual y normalizada.

e) Si el campo vectorial $\vec{f}(\bar{u})$ viniese dado por sus componentes físicas

$$\vec{f}(\bar{u}) = \widehat{h}_\rho\ F^\rho(\rho, \theta, z) + \widehat{h}_\theta\ F^\theta(\rho, \theta, z) + \widehat{h}_z\ F^z(\rho, \theta, z),$$

¿qué modificaciones habría que introducir en las expresiones anteriores? Escribir los operadores divergencia y rotacional en la base normalizada.

6.– Sea el sistema de coordenadas curvilíneas (esféricas) definidas por la transformación

$$\bar{r} = \bar{\Psi}(\bar{u}), \qquad \text{donde} \quad \bar{r} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}, \quad \bar{u} = \begin{Bmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{Bmatrix}, \quad \bar{\Psi}(\bar{u}) = \begin{Bmatrix} r \ \text{sen}(\varphi)\ \cos(\theta) \\ r \ \text{sen}(\varphi)\ \text{sen}(\theta) \\ r \ \cos(\varphi) \end{Bmatrix}$$

y sean el campo escalar $f(\bar{u}) = f(r, \theta, \varphi)$ y el campo vectorial

$$\vec{f}(\bar{u}) = \vec{h}_r \ f^r(r, \theta, \varphi) + \vec{h}_\theta \ f^\theta(r, \theta, \varphi) + \vec{h}_\varphi \ f^\varphi(r, \theta, \varphi).$$

Se pide:

a) Obtener la base natural, la base dual y la base normalizada.
b) Obtener la expresión del gradiente del campo escalar $f(r, \theta, \varphi)$ en la base dual. Reescribir la expresión anterior en las bases natural y normalizada.
c) Obtener la expresión de la divergencia del campo vectorial $\vec{f}(r, \theta, \varphi)$.
d) Obtener la expresión del rotacional del campo vectorial $\vec{f}(r, \theta, \varphi)$ en la base natural. Reescribir la expresión anterior en las bases dual y normalizada.
e) Si el campo vectorial $\vec{f}(\bar{u})$ viniese dado por sus componentes físicas

$$\vec{f}(\bar{u}) = \widehat{h}_r \ F^r(r, \theta, \varphi) + \widehat{h}_\theta \ F^\theta(r, \theta, \varphi) + \widehat{h}_\varphi \ F^\varphi(r, \theta, \varphi),$$

¿qué modificaciones habría que introducir en las expresiones anteriores? Escribir los operadores divergencia y rotacional en la base normalizada.

7.– Calcular directamente la circulación de la función vectorial

$$\bar{f}(\bar{r}) = \begin{Bmatrix} y - z + 9 \\ z - x - 9 \\ x - y \end{Bmatrix}$$

a lo largo de la curva $C = \{(x, y, z) \mid 3y^2 + z = 9, \ x^2 + y^2 = z\}$.

Comprobar el resultado anterior aplicando el Teorema de Stokes.

8.– Sea el campo vectorial

$$\bar{f}(\bar{r}) = \begin{Bmatrix} \cos y + y \cos x \\ \text{sen}\, x - x \,\text{sen}\, y \\ x\, y\, z \end{Bmatrix}$$

en el domino $\Omega = \{(x, y, z) \mid x \in [0, a], \ y \in [0, a], \ z \in [0, y^2]\}$.

Verificar el Teorema de Stokes en la cara superior de $\partial\Omega$.

9.– Sea el campo vectorial

$$\bar{f}(\bar{r}) = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}$$

en el dominio $\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z, \ z \leq 4\}$.

Verficar el Teorema de la Divergencia en el dominio Ω.

10.– Sea Γ la superficie plana comprendida entre las parábolas $y = 6x - x^2$ e $y = x^2 - 2x$. Se pide:

a) Calcular el área de Γ integrando directamente.
b) Calcular el área de Γ aplicando el Teorema de Green.
c) Calcular el centro de gravedad de Γ integrando directamente.
d) Calcular el centro de gravedad de Γ aplicando el Teorema de Green.
