

1.— Demostrar, utilizando coordenadas cartesianas ortonormales, las siguientes expresiones:

a) $\text{rot}(\overrightarrow{\text{grad}}(f)) = \vec{0}$.

b) $\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{f})) = 0$.

c) $\Delta f = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}(f)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

2.— Demostrar, utilizando coordenadas curvilíneas generales, las siguientes expresiones:

a) $\text{rot}(\overrightarrow{\text{grad}}(f)) = \vec{0}$.

b) $\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{f})) = 0$.

c) $\Delta f = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}(f)) = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^i} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial u^j} \right)$.

Comprobar que la expresión general del Laplaciano se reduce a la del ejercicio anterior cuando las coordenadas son cartesianas ortonormales.

3.— Sea el campo vectorial $\vec{f}(\vec{r}) = r^a \vec{r}$, donde $r = |\vec{r}|$, \vec{r} es el vector de posición y $a \in \mathbb{R}$ es una constante. Se pide:

a) Calcular los valores de a que hacen que el campo vectorial sea solenoidal.

b) Calcular los valores de a que hacen que el campo vectorial sea irrotacional.

4.— Sea el campo vectorial $\vec{f}(\vec{r}) = f(r) (\vec{r}/r)$, donde $f(r)$ es una función escalar cualquiera, $r = |\vec{r}|$ y \vec{r} es el vector de posición. Demostrar que el campo vectorial $\vec{f}(\vec{r})$ es irrotacional.

5.— Sea el sistema de coordenadas curvilíneas (cilíndricas) definidas por la transformación

$$\vec{r} = \bar{\Psi}(\vec{u}), \quad \text{donde} \quad \vec{r} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{Bmatrix} \rho \\ \theta \\ z \end{Bmatrix}, \quad \bar{\Psi}(\vec{u}) = \begin{Bmatrix} \rho \cos(\theta) \\ \rho \text{sen}(\theta) \\ z \end{Bmatrix}$$

y sean el campo escalar $f(\vec{u}) = f(\rho, \theta, z)$ y el campo vectorial

$$\vec{f}(\vec{u}) = \vec{h}_\rho f^\rho(\rho, \theta, z) + \vec{h}_\theta f^\theta(\rho, \theta, z) + \vec{h}_z f^z(\rho, \theta, z).$$

Se pide:

a) Obtener la base natural, la base dual y la base normalizada.

b) Obtener la expresión del gradiente del campo escalar $f(\rho, \theta, z)$ en la base dual. Reescribir la expresión anterior en las bases natural y normalizada.

c) Obtener la expresión de la divergencia del campo vectorial $\vec{f}(\rho, \theta, z)$.

d) Obtener la expresión del rotacional del campo vectorial $\vec{f}(\rho, \theta, z)$ en la base natural. Reescribir la expresión anterior en las bases dual y normalizada.

e) Si el campo vectorial $\vec{f}(\vec{u})$ viniese dado por sus componentes físicas

$$\vec{f}(\vec{u}) = \hat{h}_\rho F^\rho(\rho, \theta, z) + \hat{h}_\theta F^\theta(\rho, \theta, z) + \hat{h}_z F^z(\rho, \theta, z),$$

¿qué modificaciones habría que introducir en las expresiones anteriores?

Escribir los operadores divergencia y rotacional en la base normalizada.

6.— Sea el sistema de coordenadas curvilíneas (esféricas) definidas por la transformación

$$\bar{r} = \bar{\Psi}(\bar{u}), \quad \text{donde} \quad \bar{r} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}, \quad \bar{u} = \begin{Bmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{Bmatrix}, \quad \bar{\Psi}(\bar{u}) = \begin{Bmatrix} r \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\theta) \\ r \operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{sen}(\theta) \\ r \cos(\varphi) \end{Bmatrix}$$

y sean el campo escalar $f(\bar{u}) = f(r, \theta, \varphi)$ y el campo vectorial

$$\vec{f}(\bar{u}) = \vec{h}_r f^r(r, \theta, \varphi) + \vec{h}_\theta f^\theta(r, \theta, \varphi) + \vec{h}_\varphi f^\varphi(r, \theta, \varphi).$$

Se pide:

- a) Obtener la base natural, la base dual y la base normalizada.
- b) Obtener la expresión del gradiente del campo escalar $f(r, \theta, \varphi)$ en la base dual.
Reescribir la expresión anterior en las bases natural y normalizada.
- c) Obtener la expresión de la divergencia del campo vectorial $\vec{f}(r, \theta, \varphi)$.
- d) Obtener la expresión del rotacional del campo vectorial $\vec{f}(r, \theta, \varphi)$ en la base natural.
Reescribir la expresión anterior en las bases dual y normalizada.
- e) Si el campo vectorial $\vec{f}(\bar{u})$ viniese dado por sus componentes físicas

$$\vec{f}(\bar{u}) = \hat{h}_r F^r(r, \theta, \varphi) + \hat{h}_\theta F^\theta(r, \theta, \varphi) + \hat{h}_\varphi F^\varphi(r, \theta, \varphi),$$

¿qué modificaciones habría que introducir en las expresiones anteriores?
Escribir los operadores divergencia y rotacional en la base normalizada.

7.— Calcular directamente la circulación de la función vectorial

$$\vec{f}(\vec{r}) = \begin{Bmatrix} y - z + 9 \\ z - x - 9 \\ x - y \end{Bmatrix}$$

a lo largo de la curva $C = \{(x, y, z) \mid 3y^2 + z = 9, x^2 + y^2 = z\}$.

Comprobar el resultado anterior aplicando el Teorema de Stokes.

8.— Sea el campo vectorial

$$\vec{f}(\vec{r}) = \begin{Bmatrix} \cos y + y \cos x \\ \operatorname{sen} x - x \operatorname{sen} y \\ x y z \end{Bmatrix}$$

en el dominio $\Omega = \{(x, y, z) \mid x \in [0, a], y \in [0, a], z \in [0, y^2]\}$.

Verificar el Teorema de Stokes en la cara superior de $\partial\Omega$.

9.— Sea el campo vectorial

$$\vec{f}(\vec{r}) = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}$$

en el dominio $\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z, z \leq 4\}$.

Verificar el Teorema de la Divergencia en el dominio Ω .

10.— Sea Γ la superficie plana comprendida entre las parábolas $y = 6x - x^2$ e $y = x^2 - 2x$. Se pide:

- a) Calcular el área de Γ integrando directamente.
- b) Calcular el área de Γ aplicando el Teorema de Green.
- c) Calcular el centro de gravedad de Γ integrando directamente.
- d) Calcular el centro de gravedad de Γ aplicando el Teorema de Green.