FUNDAMENTOS DE MECÁNICA COMPUTACIONAL **Curso 2024/2025**

Práctica 6: GEOMETRÍA DIFERENCIAL DE SUPERFICIES (04/11/2024)

1.– Se denomina helicoide a la superficie obtenida al desplazarse una recta contenida en el eje OX con velocidad constante no nula a lo largo del eje OZ a la vez que gira con velocidad angular constante, también no nula. Se pide:

- **a)** Obtener una parametrización del helicoide.
- **b)** Calcular la primera forma cuadrática fundamental.
- **c)** Calcular la segunda forma cuadrática fundamental.

2.– Considérese el toro $x = \cos(u)\big(b + a\,\cos(v)\big)$, $y = \sin(u)\big(b + a\,\cos(v)\big)$, $z = a\,\sin(v)$ donde $u \in [0, 2\pi]$ y $v \in [0, 2\pi]$. Se pide:

- **a)** Calcular la primera forma cuadrática fundamental.
- **b)** Calcular el área de la superficie.
- **c)** Calcular la segunda forma cuadrática fundamental.

3.– Dado el cono $x = u\cos v$, $y = u\sin v$ y $z = u$. Calcular la longitud de la curva que verifique sobre la superficie $u = e^{\lambda t}$ y $v = t$ entre $0 \leq t \leq \pi$.

4.– Hallar el ángulo que forman las direcciones asintóticas de la superficie $z = \ln\cos y - \ln\cos x$.

5.– Dada la superficie definida $z = (y^2 - x)^2$. Probar que el lugar geométrico de los puntos parabólicos de la superficie es una línea asintótica.

6.– Hallar el ángulo que forman las curvas de las familias dadas por $dr^2 - (r^2 + a^2)d\theta^2 = 0$ sobre el helicoide definido mediante $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ y $z = a\theta + b$.

7.– Consideremos la superficie definida por $x = \cos u\cos v$, $y = \cos u\sin v$ y $z = \sin u$ y la familia de curvas paramétricas con $u = cte$. Hallar la ecuación de la curva que corta a las curvas de la familia anterior bajo un ángulo de $\pi/6$ y que pasa por el punto $(1, 0, 0)$.

8.– Considérese la superficie $x = u$, $y = v$, $z = \frac{u^3}{3} - \frac{v^2}{2}$. Se pide:

- **a)** Clasificar sus puntos.
- **b)** Hallar las líneas de máxima pendiente.
- **c)** Hallar las ecuaciones de las líneas asintóticas.

9.– Considérese el paraboloide $x = u\,\cos(v)$, $y = u\,\sin(v)$, $z = u^2$. Se pide:

- **a)** Calcular las curvaturas principales en el punto $\mathrm{P}(\sqrt{2}, 0, 2)$.
- **b)** Calcular las curvatura media y de Gauss en el punto P.
- **c)** Hallar las líneas de curvatura en P.

10.– Se denominan superficies mínimas aquellas para las cuales las curvas asintóticas son ortogonales. Comprobar que la superficie $x = u$, $y = v$, $z = \log(\cos v/\cos u)$ es de área mínima.

11.– La mayor parte de las cartas náuticas utilizadas a partir del siglo XVII se basan en la proyección cartográfica ideada por Gerardus Mercator en 1569. En la proyección de Mercator se supone que el planeta Tierra es una esfera perfecta de radio R. Los puntos situados sobre la superficie terrestre se proyectan sobre el cilindro tangente al globo terráqueo en el Ecuador. Al desarrollar posteriormente este cilindro, se obtiene el mapa de la superficie terrestre. Debido a la forma en que se realiza la proyección, las líneas verticales del plano se corresponden con los meridianos, mientras que las líneas horizontales se corresponden con los paralelos. Sobre plano, la distancia entre meridianos es constante e independiente de la latitud, mientras que en realidad esta distancia disminuye a medida que nos alejamos del Ecuador, por lo que la escala horizontal estará tanto más distorsionada cuanto mayor sea la latitud. Por ello, y en un intento de mantener las proporciones de los objetos representados en el mapa, en la proyección de Mercator se distorsiona artificialmente la escala vertical (en la misma medida que la horizontal) en función de la latitud. Sean

$$\bar{r} = \left\{ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} R \cos\varphi \, \cos\lambda \\ R \cos\varphi \, \sin\lambda \\ R \sin\varphi \end{array} \right\}$$

las coordenadas en el espacio tridimensional de un punto arbitrario (situado sobre la superficie de la Tierra) de longitud λ (medida en la forma habitual, hacia el Este a partir del Meridiano de Greenwich) y latitud φ (medida en la forma habitual, hacia el Norte a partir del Ecuador). La proyección se realiza de forma que al punto anterior le corresponde el punto de coordenada horizontal u y coordenada vertical v representado en el plano, donde

$$u = R\,\lambda, \qquad v = R\,\ln\Big(\tan\big(\varphi/2 + \pi/4\big)\Big).$$

Se pide:

- **a)** Calcular el tensor métrico de la superficie terrestre expresado en las coordenadas curvilíneas u, v.
- **b)** Comprobar que la proyección de Mercator conserva los ángulos.
- **c)** Comprobar que la proyección de Mercator no conserva el área.