

- 1.— Dada una circunferencia de radio unitario y centrada en el origen, hallar una parametrización de la curva y calcular la longitud de arco.

- 2.— Sea la catenaria $x = 3 \cosh(2t)$, $y = 3 \sinh(2t)$, $z = 6t$, donde $t \in [0, 2\pi]$. Calcular la longitud del arco en función del parámetro t a lo largo de la curva.

- 3.— Sea la curva $x = e^t \cos(t)$, $y = e^t \sin(t)$, $z = e^t$, donde $t \in (-\infty, +\infty)$. Reparametrizar esta curva en función de la longitud de arco.

- 4.— Se denomina cicloide a la curva descrita por un punto fijo P perteneciente a una circunferencia que rueda sin deslizar a lo largo de una recta. Considerando que la recta es el eje OX , que el punto P inicialmente se encuentra en el origen y que la circunferencia pertenece al plano OXY y que tiene radio R , se pide:
 - a) Obtener las ecuaciones paramétricas de la curva.
 - b) Calcular la longitud de arco a lo largo de la curva.

- 5.— Sea la hélice $x = a \cos(t)$, $y = a \sin(t)$, $z = bt$, donde $t \in (-\infty, +\infty)$. Se pide:
 - a) Calcular el triedro de Frenet con la parametrización genérica actual.
 - b) Calcular la curvatura y la torsión con la parametrización genérica actual.
 - c) Reparametrizar la hélice en función de la longitud de arco.
 - d) Calcular el triedro de Frenet con la reparametrización en función de la longitud del arco.
 - e) Calcular la curvatura y la torsión con la reparametrización en función de la longitud del arco.
 - f) Comprobar que se obtienen los mismos resultados independientemente de la parametrización escogida.

- 6.— Hallar la envolvente de la familia de circunferencias cuyos centros son los puntos $(a, 0)$ con $a \geq 0$, y cuyos diámetros están definidos por los cortes de las rectas verticales que pasan por los correspondientes centros $(x = a)$ con la parábola $y^2 = 2px$ (siendo $p > 0$).

- 7.— Sea la curva $x = 2 \sinh(t/2)$, $y = 2 \cosh(t/2)$, $z = 3t$, donde $t \in (-\infty, +\infty)$ Se pide:
 - a) Hallar el triedro de Frenet de la curva.
 - b) Hallar la ecuación del plano osculador para cualquier punto de la curva.
 - c) Escribir las ecuaciones intrínsecas de la curva.

- 8.— Sea la curva $x = \frac{1}{3}(1+t)^{3/2}$, $y = \frac{1}{3}(1-t)^{3/2}$, $z = t/\sqrt{2}$, donde $t \in [-1, 1]$. Se pide:
 - a) Hallar el triedro de Frenet de la curva en el punto $P \equiv (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0)$.
 - b) Calcular la curvatura y la torsión en el punto P .
 - c) ¿Es plana la curva? Justificar la respuesta.
 - d) Hallar las ecuaciones de los planos osculador, normal y rectificante en P .

9.— Sea la curva $x = a \cos(t)$, $y = a \sin(t)$, $z = f(t)$. Hallar la expresión más general de $f(t)$ para que se cumpla la condición de que la curva sea plana.

10.— Sea la hélice $x = 4 \cos(t)$, $y = 4 \sin(t)$, $z = 3t$, donde $t \in [-1, 1]$. Se pide:

- Hallar el lugar geométrico de los centros de curvatura. ¿Qué nombre recibe esta curva?
 - Hallar el centro y el radio de curvatura correspondientes al punto $(4, 0, 0)$.
 - Hallar la ecuación de la esfera osculatriz en el punto $(4, 0, 0)$.
-

11.— Sea la curva $x = (t)$, $y = \cosh(t)$, $z = 0$, donde $t \in (-\infty, +\infty)$. Se pide:

- Hallar la familia de evolventes a la curva.
 - Hallar la evoluta a la curva.
-

12.— Hallar la expresión paramétrica de la curva $\bar{r} = \bar{\alpha}(t)$ sabiendo que:

- Su torsión es $\tau = -1/a$, con $a > 0$.
- Su binormal tiene la misma dirección y el mismo sentido que el vector $\bar{v}(t)$, siendo

$$\bar{v}(t) = \begin{Bmatrix} \cos^2(t) \\ \sin(t) \cos(t) \\ \sin(t) \end{Bmatrix}.$$

13.— Determinar las ecuaciones paramétricas de la curva $\bar{r} = \bar{\beta}(s)$ cuyas ecuaciones intrínsecas son $\kappa(s) = 4$ y $\tau(s) = 3$, sabiendo además que el vector tangente, el vector normal y el vector de posición en $s = 0$ tienen respectivamente los valores siguientes:

$$\bar{t}_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 4/5 \\ 3/5 \end{Bmatrix}, \quad \bar{n}_0 = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \bar{r}_0 = \begin{Bmatrix} 4/25 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

14.— Se denominan curvas de Bertrand a aquellas curvas que tienen las mismas normales principales. Comprobar que los planos osculadores asociados a dos curvas de Bertrand se cortan bajo un ángulo constante.

15.— Sea una curva tal que sus planos osculadores son tangentes a una esfera. Demostrar que sus planos rectificantes se cortan en un punto.

16.— Probar que si todas las tangentes a una curva pasan por un punto fijo, entonces la curva es una recta.

17.— Probar que una curva es plana si y sólo si sus planos osculadores pasan por un punto fijo.

18.— Hallar la ecuación de la circunferencia situada en el plano OXY, con centro en la recta $4y - 4x - 7 = 0$ y que tenga el mayor orden de contacto con la parábola $y = x^2$ en el punto $P \equiv (1/2, 1/4)$. Indicar cuál es el orden del contacto entre ambas curvas.
