FUNDAMENTOS DE MECÁNICA COMPUTACIONAL **Curso 2023/2024**

Práctica 5: GEOMETRÍA DIFERENCIAL DE CURVAS (24/11/2023)

1.– Dada una circunferencia de radio unitario y centrada en el origen, hallar una parametrización de la curva y calcular la longitud de arco.

2.– Sea la catenaria $x = 3\cosh(2t)$, $y = 3\sinh(2t)$, $z = 6t$, donde $t \in [0, 2\pi]$. Calcular la longitud del arco en función del parámetro t a lo largo de la curva.

3.– Sea la curva $x = e^t \cos(t)$, $y = e^t \sin(t)$, $z = e^t$, donde $t \in (-\infty, +\infty)$. Reparametrizar esta curva en función de la longitud de arco.

4.– Se denomina cicloide a la curva descrita por un punto fijo P perteneciente a una circunferencia que rueda sin deslizar a lo largo de una recta. Considerando que la recta es el eje OX, que el punto P inicialmente se encuentra en el origen y que la circunferencia pertenece al plano OXY y que tiene radio R, se pide:

a) Obtener las ecuaciones paramétricas de la curva.
b) Calcular la longitud de arco a lo largo de la curva.

5.– Sea la hélice $x = a\cos(t)$, $y = a\sin(t)$, $z = bt$, donde $t \in (-\infty, +\infty)$. Se pide:

a) Calcular el triedro de Frenet con la parametrización genérica actual.
b) Calcular la curvatura y la torsión con la parametrización genérica actual.
c) Reparametrizar la hélice en función de la longitud de arco.
d) Calcular el triedro de Frenet con la reparametrización en función de la longitud del arco.
e) Calcular la curvatura y la torsión con la reparametrización en función de la longitud del arco.
f) Comprobar que se obtienen los mismos resultados independientemente de la parametrización escogida.

6.– Hallar la envolvente de la familia de circunferencias cuyos centros son los puntos $(a, 0)$ con $a \geq 0$, y cuyos diámetros están definidos por los cortes de las rectas verticales que pasan por los correspondientes centros ($x = a$) con la parábola $y^2 = 2px$ (siendo $p > 0$).

7.– Sea la curva $x = 2\sinh(t/2)$, $y = 2\cosh(t/2)$, $z = 3t$, donde $t \in (-\infty, +\infty)$ Se pide:

a) Hallar el triedro de Frenet de la curva.
b) Hallar la ecuación del plano osculador para cualquier punto de la curva.
c) Escribir las ecuaciones intrínsecas de la curva.

8.– Sea la curva $x = \frac{1}{3}(1+t)^{3/2}$, $y = \frac{1}{3}(1-t)^{3/2}$, $z = t/\sqrt{2}$, donde $t \in [-1, 1]$. Se pide:

a) Hallar el triedro de Frenet de la curva en el punto $P \equiv (\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ 0)$.
b) Calcular la curvatura y la torsión en el punto P.
c) ¿Es plana la curva? Justificar la respuesta.
d) Hallar las ecuaciones de los planos osculador, normal y rectificante en P.

9.– Sea la curva $x = a\cos(t)$, $y = a\sin(t)$, $z = f(t)$. Hallar la expresión más general de $f(t)$ para que se cumpla la condición de que la curva sea plana.

10.– Sea la hélice $x = 4\cos(t)$, $y = 4\sin(t)$, $z = 3t$, donde $t \in [-1, 1]$. Se pide:

a) Hallar el lugar geométrico de los centros de curvatura. ¿Qué nombre recibe esta curva?
b) Hallar el centro y el radio de curvatura correspondientes al punto $(4, 0, 0)$.
c) Hallar la ecuación de la esfera osculatriz en el punto $(4, 0, 0)$.

11.– Sea la curva $x = (t)$, $y = \cosh(t)$, $z = 0$, donde $t \in (-\infty, +\infty)$. Se pide:

a) Hallar la familia de evolventes a la curva.
b) Hallar la evoluta a la curva.

12.– Hallar la expresión paramétrica de la curva $\bar{r} = \bar{\alpha}(t)$ sabiendo que:

a) Su torsión es $\tau = -1/a$, con $a > 0$.
b) Su binormal tiene la misma dirección y el mismo sentido que el vector $\bar{v}(t)$, siendo

$$\bar{v}(t) = \left\{ \begin{array}{c} \cos^2(t) \\ \sin(t)\cos(t) \\ \sin(t) \end{array} \right\}.$$

13.– Determinar las ecuaciones paramétricas de la curva $\bar{r} = \bar{\beta}(s)$ cuyas ecuaciones intrínsecas son $\kappa(s) = 4$ y $\tau(s) = 3$, sabiendo además que el vector tangente, el vector normal y el vector de posición en $s = 0$ tienen respectivamente los valores siguientes:

$$\bar{t}_0 = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 4/5 \\ 3/5 \end{array} \right\}, \qquad \bar{n}_0 = \left\{ \begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}, \qquad \bar{r}_0 = \left\{ \begin{array}{c} 4/25 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}.$$

14.– Se denominan curvas de Bertrand a aquellas curvas que tienen las mismas normales principales. Comprobar que los planos osculadores asociados a dos curvas de Bertrand se cortan bajo un ángulo constante.

15.– Sea una curva tal que sus planos osculadores son tangentes a una esfera. Demostrar que sus planos rectificantes se cortan en un punto.

16.– Probar que si todas las tangentes a una curva pasan por un punto fijo, entonces la curva es una recta.

17.– Probar que una curva es plana si y sólo si sus planos osculadores pasan por un punto fijo.

18.– Hallar la ecuación de la circunferencia situada en el plano OXY, con centro en la recta $4y - 4x - 7 = 0$ y que tenga el mayor orden de contacto con la parábola $y = x^2$ en el punto $P \equiv (1/2, 1/4)$. Indicar cuál es el orden del contacto entre ambas curvas.
