FUNDAMENTOS DE MECÁNICA COMPUTACIONAL **Curso 2024/2025**

Práctica 4: CÁLCULO VARIACIONAL (04/11/2024)

1.– Demostrar que la curva que une dos puntos cualesquiera en el espacio de forma que se minimice la distancia recorrida entre ambos, es una recta. Resolver el problema mediante las ecuaciones de Euler–Lagrange. Plantear la Identidad de Beltrami. ¿Se obtienen los mismos resultados?

2.– El problema de la braquistócrona consiste en hallar la forma de la curva sobre la que una partícula desciende una altura H y recorre una distancia horizontal L debido a la acción de la gravedad en el menor tiempo posible. Para este problema, se pide:

a) Escribir la función Lagrangiana $L(x, y, p)$ y plantear el problema variacional.
b) Obtener la ecuación de Euler–Lagrange.
c) Escribir la Identidad de Beltrami.
d) Integrar la ecuación anterior, verificando que la solución es la cicloide

$$x = R\,\big(\theta - \operatorname{sen}(\theta)\big), \qquad y = R\,\big(1 - \cos(\theta)\big),$$

donde $\theta = 0$ y $\theta = \theta_1$ corresponden a los puntos inicial y final, respectivamente, y las constantes θ_1 y R dependen de los datos H y L.
e) Ajustar el valor de estas constantes cuando $H = 2$ m, en los casos $L = (\pi - 2)$ m, $L = \pi$ m, $L = (3\pi + 2)$ m. Representar las curvas correspondientes.

3.– El problema de la superficie de revolución de área mínima consiste en hallar la curva $y = f(x)$ que pasa por los puntos (x_a, y_a) y (x_b, y_b), y que al girar en torno al eje x engendra una superficie minimal. Para este problema, se pide:

a) Escribir la función Lagrangiana $L(x, y, p)$ y plantear el problema variacional.
b) Obtener la ecuación de Euler–Lagrange.
c) Escribir la Identidad de Beltrami.
d) Integrar la ecuación anterior, verificando que la solución es la catenaria

$$y/a = \cosh(x/a - c),$$

donde las constantes a y c dependen de los datos (x_a, y_a) y (x_b, y_b).
e) Plantear el ajuste de estas constantes cuando $x_a = -L/2$, $x_b = L/2$, e $y_a = y_b = H$ en función de los valores de H y L. Mostrar que para que exista una solución de este tipo la razón L/H debe estar por debajo de un cierto umbral, superado el cual se obtiene una solución degenerada que no es una catenaria.

4.– Sea la curva plana de longitud ℓ que está definida por las ecuaciones paramétricas $x = \beta_1(s)$, $y = \beta_2(s)$, donde $s \in [0, \ell]$ es la longitud de arco. El arco se mide desde el punto inicial $x = -a$, $y = 0$ (para el cual $s = 0$) hasta el punto final $x = a$, $y = 0$ (para el cual $s = \ell$). Se pretende hallar las funciones $\beta_1(s)$ y $\beta_2(s)$ para las que el área bajo la curva es máxima. Para este problema (que es una versión del denominado "problema isoperimétrico"), se pide:

a) Escribir la función Lagrangiana $L(s, y, p)$ y plantear el problema variacional.
b) Obtener la ecuación de Euler–Lagrange.
c) Escribir la Identidad de Beltrami.
d) Integrar la ecuación anterior, indicando cómo hay que proceder para ajustar las constantes de integración en función de los datos.

Nota: El problema variacional se planteará en función de la longitud de arco s, de la función $y = \beta_2(s)$ y de su derivada $p = \beta_2'(s)$. Se tendrá en cuenta que el parámetro s es la longitud de arco, por lo que necesariamente se cumplirá $\big(\beta_1'(s)\big)^2 + \big(\beta_2'(s)\big)^2 = 1$.

5.– Una partícula de masa m se mueve en un campo de fuerzas. Sea $\bar{r} = \bar{\alpha}(t)$ el vector de posición de la partícula (en ejes ortonormales) en el instante t, sea $\bar{v} = \dot{\bar{\alpha}}(t)$ su velocidad y sea $U(\bar{r})$ el potencial del campo de fuerzas, de forma que cuando la partícula se encuentre en la posición $\bar{r}$ estará sometida a una fuerza $\bar{f} = -m\, \overline{\text{grad}}(U)$. En estas condiciones, la energía cinética T y la energía potencial V de la partícula pueden escribirse en la forma

$$T = \frac{1}{2}\, m\, |\bar{v}|^2, \qquad V = m\, U(\bar{r}).$$

Se pretende resolver el problema utilizando Mecánica Analítica usando las componentes del vector de posición como coordenadas generalizadas, de forma que $\bar{q} = \bar{r}$, $\dot{\bar{q}} = \bar{v}$.

Se pide:

a) Escribir la función Lagrangiana $L(t, \bar{q}, \bar{p})$.
b) Plantear el Principio de Hamilton (de acción estacionaria).
b) Obtener las ecuaciones del movimiento de Lagrange.
c) Comprobar que las ecuaciones anteriores concuerdan con las Leyes de Newton.

6.– Se pretende modelar el movimiento de un planeta en el campo gravitatorio generado por el Sol. A estos efectos se supone que el planeta, de masa m, se comporta como una partícula y que el Sol, de masa M (mucho mayor), permanece inmóvil. Por ser plana la órbita se pueden utilizar coordenadas polares para representar la posición del planeta, estando el origen de coordenadas centrado en el Sol. Se pretende resolver este problema utilizando Mecánica Analítica usando las coordenadas polares $(\rho,\, \theta)$ como coordenadas generalizadas, de forma que

$$\bar{q} = \begin{Bmatrix} \rho \\ \theta \end{Bmatrix}, \qquad \dot{\bar{q}} = \begin{Bmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix}.$$

Se pide:

a) Escribir la función Lagrangiana $L(t, \bar{q}, \bar{p})$.
b) Plantear el Principio de Hamilton (de acción estacionaria).
c) Obtener las ecuaciones del movimiento de Lagrange.
d) Comprobar que las ecuaciones anteriores concuerdan con las Leyes de Newton.
e) Integrar las ecuaciones del movimiento, verificando que la órbita es la cónica

$$\rho = \frac{\ell^2\ G^{-1}\ M^{-1}}{1 + \epsilon \cos(\theta - \theta_{\text{o}})},$$

donde $\ell = \rho^2 \dot{\theta}$ (constante), $\ell/2$ es la velocidad areolar y ϵ es la excentricidad.

7.– Sea una barra de longitud L y sección circular, construida con un material elástico cuyo módulo de Young es E. Sea $x \in [0, L]$ la coordenada que identifica un punto cualquiera a lo largo del eje de la barra, de forma que $A(x)$ representa el área de la sección transversal (variable) en cada punto. La viga está sometida a una fuerza externa por unidad de volumen paralela a su eje de valor $b(x)$ en cada sección, lo que provoca unos movimientos de valor $u(x)$. En estas condiciones, se define el funcional de energía

$$\mathcal{E}[f(x)] = \int_0^L \left(L(x, y, p)\Big|_{\substack{y=f(x)\\ p=f'(x)}} \right) dx, \quad \text{con} \quad L(x, y, p) = \frac{1}{2}\, E\, A(x)\, p^2 - b(x)\, A(x)\, y.$$

Se conjetura que para $f(x) = u(x)$ se minimiza el funcional anterior, donde $u(x)$ son los desplazamientos que se producen en la realidad. Para este problema, se pide:

a) Plantear el problema variacional.
b) Obtener la ecuación de Euler–Lagrange.
c) Comprobar que la ecuación de Euler–Lagrange coincide con la ecuación diferencial de equilibrio de la sección, lo que prueba la conjetura anterior.
