FUNDAMENTOS DE MECÁNICA COMPUTACIONAL **Curso 2023/2024**

Práctica 3: ESPACIOS EUCLÍDEOS (16/10/2023)

1.– Demostrar que si en $\mathbb{R}^3$ se utiliza un producto escalar consistente con el Teorema de Pitágoras (el módulo de cualquier vector $|\vec{r}| = (\vec{r}\cdot\vec{r})^{1/2}$ coincide con su longitud real), entonces se cumple

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\ |\vec{v}|\ \cos(\theta),$$

donde θ es el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y $\cos(\theta)$ es el valor de la función coseno habitual.

Pista: descomponer el vector $\vec{v}$ en dos partes, una paralela y otra perpendicular a $\vec{u}$.

2.– Sean $g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$ las componentes del tensor métrico en la base $\left\{\vec{e}_i\right\}_{i=1,n}$. Se realiza el cambio de base $\vec{e}\,'_{\alpha} = \vec{e}_i\ c^{i}{}_{\alpha}$. Sean $g'_{\alpha\beta}$ las componentes del tensor métrico en la nueva base, donde

$$g'_{\alpha\beta} =\ c^{i}{}_{\alpha}\ g_{ij}\ c^{j}{}_{\beta} \quad\Longleftrightarrow\quad \underset{\sim}{G}' = \underset{\sim}{C}^{T}\ \underset{\sim}{G}\ \ \underset{\sim}{C}, \quad \text{con} \quad \underset{\sim}{C} = \begin{bmatrix} c^{1}{}_{1} & \cdots & c^{1}{}_{n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c^{n}{}_{1} & \cdots & c^{n}{}_{n} \end{bmatrix}.$$

Se pide:

a) Partiendo de la expresión anterior, y utilizando exclusivamente notación indicial, demostrar que el cambio de base inverso es

$$g_{ij} =\ \gamma^{\alpha}{}_{i}\ g'_{\alpha\beta}\ \gamma^{\beta}{}_{j}, \quad \text{donde} \quad \underset{\sim}{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \gamma^{1}{}_{1} & \cdots & \gamma^{1}{}_{n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma^{n}{}_{1} & \cdots & \gamma^{n}{}_{n} \end{bmatrix}.$$

b) Utilizando notación indicial, deducir las condiciones que debe cumplir el cambio para que si la base inicial es ortonormal, la nueva base también lo sea.

c) Repetir el apartado anterior utilizando notación matricial.

3.– Sean $\bar{u}$ las componentes (contravariantes) del vector $\vec{u}$ en la base $\underset{\sim}{E}$, y sean $\underline{u}$ sus componentes (covariantes) en la base $\widetilde{E}$, dual de la anterior, de forma que

$$\vec{u} = \underset{\sim}{E}\ \bar{u} = \widetilde{E}\ \underline{u}, \qquad \textit{con} \quad \underline{u} =\ \underset{\sim}{G}\ \bar{u} \quad\Longleftrightarrow\quad \bar{u} =\ \underset{\sim}{G}^{-1}\ \underline{u}.$$

Se realiza el cambio de base $\underset{\sim}{E}' =\ \underset{\sim}{E}\ \underset{\sim}{C}$. Se pide:

a) Demostrar que las componentes $\underline{u}$ cambian de forma covariante.

b) Demostrar que los coeficientes del inverso del tensor métrico ($\underset{\sim}{G}^{-1}$) cambian de forma doblemente contravariante.

b) Demostrar que los vectores de la base dual ($\widetilde{E}$) cambian de forma contravariante.

4.– Sea $\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{F}^{T}\ \underset{\sim}{G}\ \ \underset{\sim}{F}$ la expresión del tensor derecho de Cauchy-Green correspondiente a la transformación geométrica definida por $\underset{\sim}{F}$ en la base $\underset{\sim}{E}$, donde $\underset{\sim}{G}$ es la expresión del tensor métrico. Se realiza el cambio de base $\underset{\sim}{E}' =\ \underset{\sim}{E}\ \underset{\sim}{C}$.

Se pide: usando notación matricial, hallar el cambio de base de los componentes de $\underset{\sim}{C}$. ¿Se trata de un cambio de base tensorial? En caso afirmativo, ¿de qué tipo? Teniendo en cuenta lo anterior, ¿cuál es la forma correcta de colocar los índices de sus componentes?

5.– Sea $\{\vec{e}_i\}_{i=1,3}$ una base determinada de $\mathbb{R}^3$, y sean $\bar{u}$ y $\bar{v}$ las componentes contravariantes de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en la base anterior, donde

$$\vec{e}_1 = \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right\}, \quad \vec{e}_2 = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 2 \\ 1 \end{array} \right\}, \quad \vec{e}_3 = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 2 \end{array} \right\}; \qquad \bar{u} = \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ -4 \\ 8 \end{array} \right\}, \bar{v} = \left\{ \begin{array}{c} 6 \\ 4 \\ -2 \end{array} \right\}.$$

Se pide:

a) Expresar los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en la base canónica. A partir de estas expresiones, calcular directamente $\vec{u} \cdot \vec{v}$ y $\vec{u} \wedge \vec{v}$. Expresar el producto vectorial también en la base $\{\vec{e}_i\}_{i=1,3}$.

b) Obtener la expresión del tensor métrico en la base anterior. Obtener la base dual. Verificar que la inversa del tensor métrico es su expresión en la base dual.

c) Sin recurrir a la base canónica, calcular $\vec{u} \cdot \vec{v}$ y las componentes covariantes de $\vec{u} \wedge \vec{v}$. Pasar las componentes covariantes de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ a contravariantes. Comprobar que los resultados coinciden con los obtenidos en el apartado a).

6.– Obtener el tensor métrico de la variedad lineal engendrada por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ del problema anterior. A partir de este resultado, calcular el área del paralelogramo generado por estos dos vectores. Comprobar que el valor obtenido coincide con el módulo de su producto vectorial.

7.– Sea $\underset{\sim}{T}$ la expresión del tensor de un endomorfismo en la base $\{\vec{e}_i\}_{i=1,n}$, y sea $\underset{\sim}{G}$ la expresión del tensor métrico en la misma base. Se realizan los siguientes productos matriciales:

$$1) X = \underset{\sim}{G} \quad \underset{\sim}{G} \iff x_{ik} = g_{ij}\; g_{jk}\;; \qquad 2) X = \underset{\sim}{T} \quad \underset{\sim}{T} \iff x^i{}_k = t^i{}_j\; t^j{}_k\;;$$

$$3) X = \underset{\sim}{G} \quad \underset{\sim}{T} \iff x_{ik} = g_{ij}\; t^j{}_k\;; \qquad 4) X = \underset{\sim}{T} \quad \underset{\sim}{G} \iff x^i{}_k = t^i{}_j\; g_{jk}\;;$$

$$5) X = \underset{\sim}{T} \quad \underset{\sim}{G}^{-1} \iff x^{ik} = t^i{}_j\; g^{jk}\;; \qquad 6) X = \underset{\sim}{G}^{-1} \underset{\sim}{T} \iff x^i{}_k = g^{ij}\; t^j{}_k\;;$$

Se pide:

a) Para cada una de estos casos, y utilizando notación matricial, verificar si el correspondiente resultado ($\underset{\sim}{X}$) es la expresión de un tensor.

b) Repetir el caso N.º 3 del apartado anterior utilizando notación indicial.

c) En los casos afirmativos, explicar para qué sirve el tensor. ¿Se aprecia algún tipo de correlación entre los resultados obtenidos y la forma de la expresión indicial?

8.– Sea la transformación geométrica infinitesimal en $\mathbb{R}^n$ cuyo tensor (expresado en una base ortonormal) es

$$\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{I} \;+\; \underset{\sim}{J}, \quad \text{donde} \quad ||\underset{\sim}{J}|| << ||\underset{\sim}{I}||.$$

Se pide, demostrar que las siguientes aproximaciones son válidas:

$$\mathcal{F} = \det(\underset{\sim}{F}) \approx 1 + \operatorname{tr}(\underset{\sim}{J}); \qquad \mathcal{F}^{1/n} \approx 1 + \operatorname{tr}(\underset{\sim}{J})/n; \qquad \mathcal{F}^{-1/n} \approx 1 - \operatorname{tr}(\underset{\sim}{J})/n.$$

9.– Sea la transformación geométrica en $\mathbb{R}^2$ cuyo tensor (expresado en una base ortonormal) es

$$\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{J}, \quad \text{con} \quad \underset{\sim}{J} = \delta \begin{bmatrix} 0,304 & 1,178 \\ -0,872 & -0,254 \end{bmatrix}, \quad \delta = 1.$$

Se pide:

a) Obtener la descomposición polar de la transformación anterior.

b) Expresar la transformación como producto de una inflación, una distorsión y una rotación. Interpretar geométricamente este resultado.

10.– Repetir el problema anterior con $\delta = 1/1000$. Realizar los cálculos de forma aproximada suponiendo que la transformación es infinitesimal. Verificar que las aproximaciones del problema N.º 8 dan resultados aceptables.

11.– Sea m una masa puntual cuya posición está definida por el vector $\vec{r} = \underset{\sim}{E}\, \bar{r}$, donde $\bar{r}$ son sus coordenadas contravariantes en la base $\underset{\sim}{E}$ (no necesariamente ortogonal) que se ha elegido para trabajar en $\mathbb{R}^3$.

En estas condiciones, se define la matriz

$$\underset{\sim}{\mathcal{I}} = m \left[\left(\bar{r}^{\,T} \underset{\sim}{G}\, \bar{r} \right) \underset{\sim}{G} - \underset{\sim}{G} \left[\bar{r}\, \bar{r}^{\,T} \right] \underset{\sim}{G} \right],$$

donde la matriz $\underset{\sim}{G}$ es la expresión doblemente covariante del tensor métrico en la base $\underset{\sim}{E}$.

Se pide:

a) Comprobar que la matriz $\underset{\sim}{\mathcal{I}}$ es la expresión doblemente covariante de un tensor (llamado tensor de inercia) en la base $\underset{\sim}{E}$. Es decir, que al realizar un cambio de base se verifica

$$\underset{\sim}{E}' = \underset{\sim}{E}\, \underset{\sim}{C} \quad \Longrightarrow \quad \underset{\sim}{\mathcal{I}}' = \underset{\sim}{C}^{\,T}\, \underset{\sim}{\mathcal{I}}\, \underset{\sim}{C}.$$

b) Comprobar que dado el versor (vector unitario) $\vec{u} = \underset{\sim}{E}\, \bar{u}$, con $|\vec{u}| = 1$, el escalar

$$\mathcal{I}(\, \vec{u}\,) = \bar{u}^{\,T}\, \underset{\sim}{\mathcal{I}}\, \bar{u}$$

representa el momento de inercia de la masa puntual respecto a la recta de versor $\vec{u}$ que pasa por el origen de coordenadas.

c) Utilizando los resultados anteriores, demostrar que el concepto de tensor de inercia se puede generalizar para un sólido Ω, de forma que el momento de inercia del sólido respecto a la recta de versor $\vec{u}$ que pasa por el origen de coordenadas vendrá dado por

$$\mathcal{I}(\, \vec{u}\,) = \bar{u}^{\,T}\, \underset{\sim}{\mathcal{I}}\, \bar{u}, \quad \text{donde } \underset{\sim}{\mathcal{I}} = \iiint_{\vec{r}\in\Omega)} \left[\left(\bar{r}^{\,T} \underset{\sim}{G}\, \bar{r} \right) \underset{\sim}{G} - \underset{\sim}{G} \left[\bar{r}\, \bar{r}^{\,T} \right] \underset{\sim}{G} \right] \rho(\bar{r})\; dV,$$

donde la matriz $\underset{\sim}{\mathcal{I}}$ es la expresión doblemente covariante del tensor de inercia del sólido en la base $\underset{\sim}{E}$, y $\rho(\bar{r})$ es la función que determina la densidad en cada punto.