**FUNDAMENTOS DE MECÁNICA COMPUTACIONAL** **Curso 2024/2025**

**Práctica 3: ESPACIOS EUCLÍDEOS** (14/10/2024)

---

**1.–** Demostrar que si en $\mathbb{R}^3$ se utiliza un producto escalar consistente con el Teorema de Pitágoras (el módulo de cualquier vector $|\vec{r}| = (\vec{r}\cdot\vec{r})^{1/2}$ coincide con su longitud real), entonces se cumple

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\ |\vec{v}|\ \cos(\theta),$$

donde $\theta$ es el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y $\cos(\theta)$ es el valor de la función coseno habitual.

**Pista:** descomponer el vector $\vec{v}$ en dos partes, una paralela y otra perpendicular a $\vec{u}$.

---

**2.–** Sean $g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$ las componentes del tensor métrico en la base $\{\vec{e}_i\}_{i=1,n}$. Se realiza el cambio de base $\vec{e}\,'_\alpha = \vec{e}_i\ c^{\,i}_{\alpha}$. Sean $g'_{\alpha\beta}$ las componentes del tensor métrico en la nueva base, donde

$$g'_{\alpha\beta} = c^{\,i}_{\alpha}\ g_{ij}\ c^{\,j}_{\beta} \iff \underset{\sim}{G}\,' = \underset{\sim}{C}^{\,T}\ \underset{\sim}{G}\ \ \underset{\sim}{C}, \quad \text{con} \quad \underset{\sim}{C} = \begin{bmatrix} c^{\,1}_{\,1} & \cdots & c^{\,1}_{\,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c^{\,n}_{\,1} & \cdots & c^{\,n}_{\,n} \end{bmatrix}.$$

Se pide:

**a)** Partiendo de la expresión anterior, y utilizando exclusivamente notación indicial, demostrar que el cambio de base inverso es

$$g_{ij} = \gamma^{\,\alpha}_{\,i}\ g'_{\alpha\beta}\ \gamma^{\,\beta}_{\,j}, \quad \text{donde} \quad \underset{\sim}{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \gamma^{\,1}_{\,1} & \cdots & \gamma^{\,1}_{\,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma^{\,n}_{\,1} & \cdots & \gamma^{\,n}_{\,n} \end{bmatrix}.$$

**b)** Utilizando notación indicial, deducir las condiciones que debe cumplir el cambio para que si la base inicial es ortonormal, la nueva base también lo sea.

**c)** Repetir el apartado anterior utilizando notación matricial.

---

**3.–** Sean $\bar{u}$ las componentes (contravariantes) del vector $\vec{u}$ en la base $\underset{\sim}{E}$, y sean $\underline{u}$ sus componentes (covariantes) en la base $\widetilde{E}$, dual de la anterior, de forma que

$$\vec{u} = \underset{\sim}{E}\ \bar{u} = \widetilde{E}\ \underline{u}, \qquad con \quad \underline{u} = \underset{\sim}{G}\ \bar{u} \iff \bar{u} = \underset{\sim}{G}^{-1}\ \underline{u}.$$

Se realiza el cambio de base $\underset{\sim}{E}\,' = \underset{\sim}{E}\ \underset{\sim}{C}$. Se pide:

**a)** Demostrar que las componentes $\underline{u}$ cambian de forma covariante.

**b)** Demostrar que los coeficientes del inverso del tensor métrico ($\underset{\sim}{G}^{-1}$) cambian de forma doblemente contravariante.

**b)** Demostrar que los vectores de la base dual ($\widetilde{E}$) cambian de forma contravariante.

---

**4.–** Sea $\underset{\sim}{\mathcal{C}} = \underset{\sim}{\mathcal{F}}^{\,T}\ \underset{\sim}{G}\ \ \underset{\sim}{\mathcal{F}}$ la expresión del tensor derecho de Cauchy-Green correspondiente a la transformación geométrica definida por $\underset{\sim}{\mathcal{F}}$ en la base $\underset{\sim}{E}$, donde $\underset{\sim}{G}$ es la expresión del tensor métrico. Se realiza el cambio de base $\underset{\sim}{E}\,' = \underset{\sim}{E}\ \underset{\sim}{C}$.

Se pide: usando notación matricial, hallar el cambio de base de los componentes de $\underset{\sim}{\mathcal{C}}$. ¿Se trata de un cambio de base tensorial? En caso afirmativo, ¿de qué tipo? Teniendo en cuenta lo anterior, ¿cuál es la forma correcta de colocar los índices de sus componentes?

---

**5.–** Sea $\{\vec{e}_i\}_{i=1,3}$ una base determinada de $\mathbb{R}^3$, y sean $\bar{u}$ y $\bar{v}$ las componentes contravariantes de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en la base anterior, donde

$$\vec{e}_1 = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{Bmatrix}; \qquad \bar{u} = \begin{Bmatrix} 2 \\ -4 \\ 8 \end{Bmatrix}, \bar{v} = \begin{Bmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{Bmatrix}.$$

Se pide:

**a)** Expresar los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en la base canónica. A partir de estas expresiones, calcular directamente $\vec{u} \cdot \vec{v}$ y $\vec{u} \wedge \vec{v}$. Expresar el producto vectorial también en la base $\{\vec{e}_i\}_{i=1,3}$.

**b)** Obtener la expresión del tensor métrico en la base anterior. Obtener la base dual. Verificar que la inversa del tensor métrico es su expresión en la base dual.

**c)** Sin recurrir a la base canónica, calcular $\vec{u} \cdot \vec{v}$ y las componentes covariantes de $\vec{u} \wedge \vec{v}$. Pasar las componentes covariantes de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ a contravariantes. Comprobar que los resultados coinciden con los obtenidos en el apartado a).

---

**6.–** Obtener el tensor métrico de la variedad lineal engendrada por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ del problema anterior. A partir de este resultado, calcular el área del paralelogramo generado por estos dos vectores. Comprobar que el valor obtenido coincide con el módulo de su producto vectorial.

---

**7.–** Sea $\underset{\sim}{T}$ la expresión del tensor de un endomorfismo en la base $\{\vec{e}_i\}_{i=1,n}$, y sea $\underset{\sim}{G}$ la expresión del tensor métrico en la misma base. Se realizan los siguientes productos matriciales:

$$1) X = \underset{\sim}{G} \quad \underset{\sim}{G} \iff x_{ik} = g_{ij}\, g_{jk}\ ; \qquad 2) X = \underset{\sim}{T} \quad \underset{\sim}{T} \iff x^i{}_k = t^i{}_j\, t^j{}_k\ ;$$

$$3) X = \underset{\sim}{G} \quad \underset{\sim}{T} \iff x_{ik} = g_{ij}\, t^j{}_k\ ; \qquad 4) X = \underset{\sim}{T} \quad \underset{\sim}{G} \iff x^i{}_k = t^i{}_j\, g_{jk}\ ;$$

$$5) X = \underset{\sim}{T} \quad \underset{\sim}{G}^{-1} \iff x^{ik} = t^i{}_j\, g^{jk}\ ; \qquad 6) X = \underset{\sim}{G}^{-1}\, \underset{\sim}{T} \iff x^i{}_k = g^{ij}\, t^j{}_k\ ;$$

Se pide:

**a)** Para cada una de estos casos, y utilizando notación matricial, verificar si el correspondiente resultado ($\underset{\sim}{X}$) es la expresión de un tensor.

**b)** Repetir el caso N.º 3 del apartado anterior utilizando notación indicial.

**c)** En los casos afirmativos, explicar para qué sirve el tensor. ¿Se aprecia algún tipo de correlación entre los resultados obtenidos y la forma de la expresión indicial?

---

**8.–** Sea la transformación geométrica infinitesimal en $\mathbb{R}^n$ cuyo tensor (expresado en una base ortonormal) es

$$\underset{\sim}{\mathcal{F}} = \underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{\mathcal{J}}, \quad \text{donde} \quad ||\underset{\sim}{\mathcal{J}}|| << ||\underset{\sim}{I}||.$$

Se pide, demostrar que las siguientes aproximaciones son válidas:

$$\mathcal{F} = \det(\underset{\sim}{\mathcal{F}}) \approx 1 + \mathrm{tr}(\underset{\sim}{\mathcal{J}}); \qquad \mathcal{F}^{1/n} \approx 1 + \mathrm{tr}(\underset{\sim}{\mathcal{J}})/n; \qquad \mathcal{F}^{-1/n} \approx 1 - \mathrm{tr}(\underset{\sim}{\mathcal{J}})/n.$$

---

**9.–** Sea la transformación geométrica en $\mathbb{R}^2$ cuyo tensor (expresado en una base ortonormal) es

$$\underset{\sim}{\mathcal{F}} = \underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{\mathcal{J}}, \quad \text{con} \quad \underset{\sim}{\mathcal{J}} = \delta \begin{bmatrix} 0,304 & 1,178 \\ -0,872 & -0,254 \end{bmatrix}, \quad \delta = 1.$$

Se pide:

**a)** Obtener la descomposición polar de la transformación anterior.

**b)** Expresar la transformación como producto de una inflación, una distorsión y una rotación. Interpretar geométricamente este resultado.

---

**10.–** Repetir el problema anterior con $\delta = 1/1000$. Realizar los cálculos de forma aproximada suponiendo que la transformación es infinitesimal. Verificar que las aproximaciones del problema N.º 8 dan resultados aceptables.

---

**11.–** Sea $m$ una masa puntual cuya posición está definida por el vector $\vec{r} = \underset{\sim}{E}\ \bar{r}$, donde $\bar{r}$ son sus coordenadas contravariantes en la base $\underset{\sim}{E}$ (no necesariamente ortogonal) que se ha elegido para trabajar en $\mathbb{R}^3$.

En estas condiciones, se define la matriz

$$\underset{\sim}{\mathcal{I}} = m \left[ \left(\bar{r}^{\,T} \underset{\sim}{G}\, \bar{r}\right) \underset{\sim}{G} - \underset{\sim}{G} \left[\bar{r}\, \bar{r}^{\,T}\right] \underset{\sim}{G} \right],$$

donde la matriz $\underset{\sim}{G}$ es la expresión doblemente covariante del tensor métrico en la base $\underset{\sim}{E}$.

Se pide:

**a)** Comprobar que la matriz $\underset{\sim}{\mathcal{I}}$ es la expresión doblemente covariante de un tensor (llamado tensor de inercia) en la base $\underset{\sim}{E}$. Es decir, que al realizar un cambio de base se verifica

$$\underset{\sim}{E}' = \underset{\sim}{E}\ \underset{\sim}{C} \quad \Longrightarrow \quad \underset{\sim}{\mathcal{I}}' = \underset{\sim}{C}^{\,T}\ \underset{\sim}{\mathcal{I}}\ \underset{\sim}{C}.$$

**b)** Comprobar que dado el versor (vector unitario) $\vec{u} = \underset{\sim}{E}\ \bar{u}$, con $|\vec{u}| = 1$, el escalar

$$\mathcal{I}(\,\vec{u}\,) = \bar{u}^{\,T}\ \underset{\sim}{\mathcal{I}}\ \bar{u}$$

representa el momento de inercia de la masa puntual respecto a la recta de versor $\vec{u}$ que pasa por el origen de coordenadas.

**c)** Utilizando los resultados anteriores, demostrar que el concepto de tensor de inercia se puede generalizar para un sólido $\Omega$, de forma que el momento de inercia del sólido respecto a la recta de versor $\vec{u}$ que pasa por el origen de coordenadas vendrá dado por

$$\mathcal{I}(\,\vec{u}\,) = \bar{u}^{\,T}\ \underset{\sim}{\mathcal{I}}\ \bar{u}, \quad \text{donde } \underset{\sim}{\mathcal{I}} = \iiint_{\vec{r}\in\Omega)} \left[ \left(\bar{r}^{\,T} \underset{\sim}{G}\, \bar{r}\right) \underset{\sim}{G} - \underset{\sim}{G} \left[\bar{r}\, \bar{r}^{\,T}\right] \underset{\sim}{G} \right] \rho(\bar{r})\ dV,$$

donde la matriz $\underset{\sim}{\mathcal{I}}$ es la expresión doblemente covariante del tensor de inercia del sólido en la base $\underset{\sim}{E}$, y $\rho(\bar{r})$ es la función que determina la densidad en cada punto.