FUNDAMENTOS DE MECÁNICA COMPUTACIONAL **Curso 2023/2024**

Práctica 1: INTEGRALES DOBLES (08/09/2023)

1.– Hallar las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_0^1\int_1^2 dx\,dy$

b) $\displaystyle\int_1^2\int_0^3 (x+y)\,dx\,dy$

c) $\displaystyle\int_2^4\int_1^2 (x^2+y^2)\,dy\,dx$

d) $\displaystyle\int_0^1\int_{x^2}^{x} xy^2\,dy\,dx$

e) $\displaystyle\int_1^2\int_0^{y^{3/2}} \frac{x}{y^2}\,dx\,dy$

f) $\displaystyle\int_0^1\int_x^{\sqrt{x}} (y+y^3)\,dy\,dx$

g) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{x^2} xe^y\,dy\,dx$

h) $\displaystyle\int_2^4\int_y^{8-y} y\,dx\,dy$

i) $\displaystyle\int_0^{\arctan(3/2)}\int_0^{2\sec\theta} \rho\,d\rho\,d\theta$

j) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^2 \rho^2\cos\theta\,d\rho\,d\theta$

k) $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\int_0^{\tan\theta\sec\theta} \rho^3\cos^2\theta\,d\rho\,d\theta$

l) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{1-\cos\theta} \rho^3\cos^2\theta\,d\rho\,d\theta$

2.– Resolver las siguientes integrales dobles:

a) $\displaystyle\iint_R dA$, siendo R la región del primer cuadrante limitada por $y^2=x^3$, $y=x$.

b) $\displaystyle\iint_R dA$, siendo R la región situada a la izquierda de $x=1$, entre las curvas $y=2x$, $y=x^2$.

c) $\displaystyle\iint_R x^2\,dA$, siendo R la región del primer cuadrante limitada por $xy=16$, $y=x$, $x=8$, $y=0$.

d) $\displaystyle\iint_R e^{x^2}\,dA$, siendo R la región limitada por $x=3y$, $x=3$, $y=0$.

e) $\displaystyle\iint_R x\,dA$, siendo R la región limitada por $y=x^2$, $y=x^3$.

f) $\displaystyle\iint_R y\,dA$, siendo R la misma región que en el apartado anterior.

g) $\displaystyle\iint_R x^2\,dA$, siendo R la región limitada por $y=x$, $y=2x$, $x=2$.

h) $\displaystyle\iint_R dA$, siendo R la región limitada por $2y=x^2$, $y=3x$, $x+y=4$, con $x\in[0,2]$, $y\geq 0$.

i) $\displaystyle\iint_R y\,dA$, siendo R la región limitada por $y^2=4x$, $y^2=5-x$, por encima de $y=0$.

j) $\displaystyle\iint_R xy^2\,dA$, siendo R la región limitada por $y^2=2px$, $x=p/2$.

3.– En el problema **1**, desde el apartado **a)** hasta el **h)**, invertir el orden de integración y calcular la integral resultante.

4.– Realizando un cambio de variable adecuado, calcular:

a) $\displaystyle\iint_R e^{\left(\frac{y-x}{y+x}\right)}\, dA$, siendo R el triángulo formado por las rectas $x=0$, $y=0$, $x+y=1$.

b) $\displaystyle\iint_R \sqrt{1-x^2-y^2}\, dA$, siendo R el círculo de radio 1 y centro el origen de coordenadas.

c) $\displaystyle\iint_R \sqrt{x^2+y^2}\, dA$, siendo R el círculo de radio a y centro el origen de coordenadas.

d) $\displaystyle\iint_R \operatorname{sen}\sqrt{x^2+y^2}\, dA$, siendo R el área limitada por $\pi^2 = x^2+y^2$; $4\pi^2 = x^2+y^2$.

5.– Calcular las áreas siguientes utilizando integrales dobles

a) Limitada por $3x+4y=24$, $x=0$, $y=0$.

b) Limitada por $x+y=2$, $2y=x+4$, $y=0$.

c) Limitada por $x^2=4y$, $8y=x^2+16$.

d) Limitada por $y=2x-x^2$, $y=3x^2-6x$.

e) Encerrada por el lazo $y^2=x^2(2-x)$.

f) Limitada por $xy=4$, $x+y=5$.

g) Encerrada por $(x-y)^2+x^2=a^2$.

h) Exterior a $\rho=2$ e interior a $\rho=2(1+\cos\theta)$.

i) Exterior a $\rho^2=8\cos 2\theta$ e interior a $\rho=4\operatorname{sen}\theta$.

j) Limitada por $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$, $x^2+y^2\geq a^2$.

6.– Usando integrales dobles calcular los volúmenes limitados por las superficies siguientes:

a) $z=0$, $z=x+y+2$, $x^2+y^2=16$, $x>0$, $y>0$.

b) $x^2+y^2=4$, $y+z=4$, $z=0$.

c) $x^2+4y^2=z$, $z=0$, $y^2=x$, $x^2=y$.

d) $x^2+y^2=4z$, $x^2+y^2=8y$, $z=0$.

e) $x^2+z=9$, $3x+4y=24$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

f) $xy=4z$, $y=x$, $x=4$, $z=0$.

g) $x^2+y^2=25$, $y=z$, $x=0$, $z=0$.

h) $x^2+y^2=16$, $x^2+z^2=16$.

i) Interior a $\rho=2$ y exterior a $z^2=\rho^2$.

j) Común a $\rho^2+z^2=a^2$ y a $\rho=a\operatorname{sen}\theta$.

7.– Calcular el volumen extraído al hacer un agujero de radio a, a través de una esfera de radio $2a$, siendo el eje del agujero un diámetro de la esfera.

8.– Calcular el volumen generado al girar un pétalo de $\rho=\operatorname{sen}2\theta$, en torno a uno cualquiera de los ejes.
