FUNDAMENTOS DE MECÁNICA COMPUTACIONAL **Curso 2023/2024**

Práctica 0: CAMPOS EN MEDIOS CONTINUOS (3/10/2023)

1.– Sea una viga de longitud L y sección rectangular, de ancho b y canto c. Sea $\bar{r}_0$ el vector de posición de un punto material cualquiera de la viga, donde

$$\bar{r}_0 = \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Bmatrix}, \qquad \text{con} \quad x_0 \in [0, L], \quad y_0 \in [-b/2, b/2], \quad z_0 \in [-c/2, c/2].$$

Se supone que para cada valor de $x_0 \in [0, L]$ la sección transversal (que es rectangular) de la viga permanece plana (Hipótesis de Navier) y experimenta los siguientes movimientos:

1) Se desplaza una distancia $\delta(x_0)$ a lo largo del eje X.
2) Se desplaza una distancia $\eta(x_0)$ a lo largo del eje Z.
3) Gira un ángulo $\alpha(x_0)$ (en radianes) en torno al eje Y.

Se pide:

a) Describir el movimiento del punto material $\bar{r}_0$ en forma lagrangiana. Obtener el campo de desplazamientos.
b) Calcular el tensor gradiente de movimientos $\underset{\sim}{F}_{\mathcal{L}}$, su determinante $F_{\mathcal{L}}$ y el tensor gradiente de desplazamientos $\underset{\sim}{J}_{\mathcal{L}}$. Interpretar su significado.
c) Repetir los apartados anteriores introduciendo la hipótesis de que los desplazamientos son pequeños (esto es: $\delta(x_0) << L$, $\eta(x_0) << c$, $\alpha(x_0) << \pi/2$).

2.– Sea una tubería cilíndrica de longitud indefinida y sección circular de radio R que se encuentra llena de un fluido en movimiento. El eje de la tubería se orienta a lo largo del eje Z. Sea $\bar{r}$ el vector de posición de un punto cualquiera del interior de la tubería, donde

$$\bar{r} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}, \qquad \text{con} \quad x^2 + y^2 \leq R^2, \quad z \in (-\infty, \infty).$$

Se supone que el fluido se mueve en régimen laminar, de forma que la velocidad del fluido en el punto $\bar{r}$ y en el instante de tiempo t viene dada por la expresión

$$\bar{a}_{\mathcal{E}}(\bar{r}, t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \left(1 - (x^2 + y^2)/R^2\right) \, v_{\max} \end{Bmatrix}, \qquad \text{donde} \quad v_{\max} = \frac{2Q}{\pi R^2}.$$

Se pide:

a) Demostrar que Q es el caudal (volumen de fluido que atraviesa una sección transversal de la tubería por unidad de tiempo).
b) Describir el movimiento de las partículas del fluido en forma lagrangiana, esto es mediante una expresión del tipo $\bar{r} = \bar{r}_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0, t)$. Obtener el campo de desplazamientos. Calcular la velocidad de la partícula y verificar su compatibilidad con el campo espacial de velocidades en forma euleriana.
c) Calcular el tensor gradiente de movimientos $\underset{\sim}{F}_{\mathcal{L}}$, su determinante $F_{\mathcal{L}}$ y el tensor gradiente de desplazamientos $\underset{\sim}{J}_{\mathcal{L}}$. Interpretar su significado.
d) Calcular la derivada temporal del tensor gradiente de movimientos y verificar que coincide con la derivada espacial del campo de velocidades en forma lagrangiana.
e) Calcular el tensor gradiente de velocidad $\underset{\sim}{\ell}$ utilizando las descripciones lagrangiana y euleriana y comprobar que el resultado es el mismo en los dos casos.

3.– Un vehículo circula sobre el tablero biapoyado de un puente de longitud L con velocidad horizontal a = constante. A su vez, el tablero vibra verticalmente, de forma que el desplazamiento vertical de la sección situada a una distancia $x \in [0, L]$ del apoyo izquierdo viene dado por la expresión

$$w = w_{\text{max}} \ \text{sen}\left(\pi \frac{x}{L}\right) \ \text{sen}(\omega t) \qquad \text{con} \quad \omega = \frac{\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}},$$

donde w_{max} es la amplitud máxima de la vibración en el centro del vano y ω es la frecuencia angular (en rad/s) que se expresa en función del módulo de elasticidad E y la densidad ρ del material y del momento de inercia I y el área A de la sección transversal del tablero.

Se pide:

a) Calcular la velocidad vertical de un punto cualquiera del tablero en el instante de tiempo t.

b) Calcular la velocidad vertical que experimenta el vehículo en su recorrido en el instante de tiempo t.

c) Establecer la relación de los dos valores anteriores con el campo espacial de velocidades en una descripción euleriana y la velocidad de la partícula en una descripción lagrangiana.