GEOMETRÍA DIFERENCIAL DE CURVAS REGULARES: NOTACIÓN Y FORMULARIO

F. Navarrina, L. Ramírez & GMNI

GMNI — GRUPO DE MÉTODOS NUMÉRICOS EN INGENIERÍA

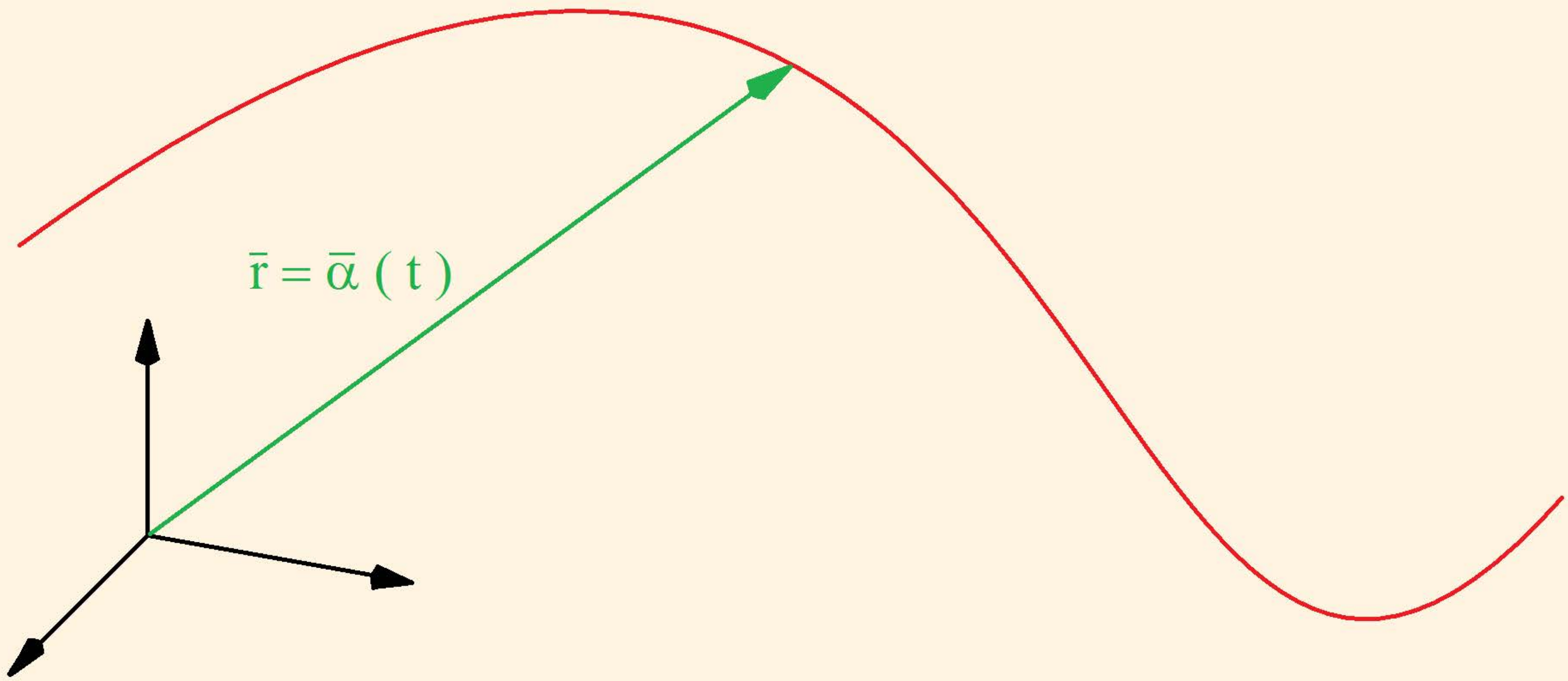
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
Universidad de A Coruña, España

e-mail: fermin.navarrina@udc.es
página web: http://caminos.udc.es/gmni

ÍNDICE

- Representación de una curva en paramétricas
- Diferencial de arco y vector tangente
- Triedro de Frenet
- Cálculo de la curvatura y la torsión
- Contacto
- Ecuaciones intrínsecas
- Integral a lo largo de una curva
- Algunos problemas clásicos
- Estudio particular de curvas planas

Representación de una curva en paramétricas (I)



REPRESENTACIÓN DE UNA CURVA EN PARAMÉTRICAS ($\mathbb{R}^n$)

Representación de una curva en paramétricas (II)

EXPRESIÓN GENERAL:

$$\boxed{\vec{r} = \vec{\alpha}(t) = \vec{e}_i\, \alpha^i(t)} \quad \text{con} \quad \vec{e}_i = \bar{e}_i = \begin{Bmatrix} e^{\,1}_{\;i} \\ \vdots \\ e^{\,n}_{\;i} \end{Bmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

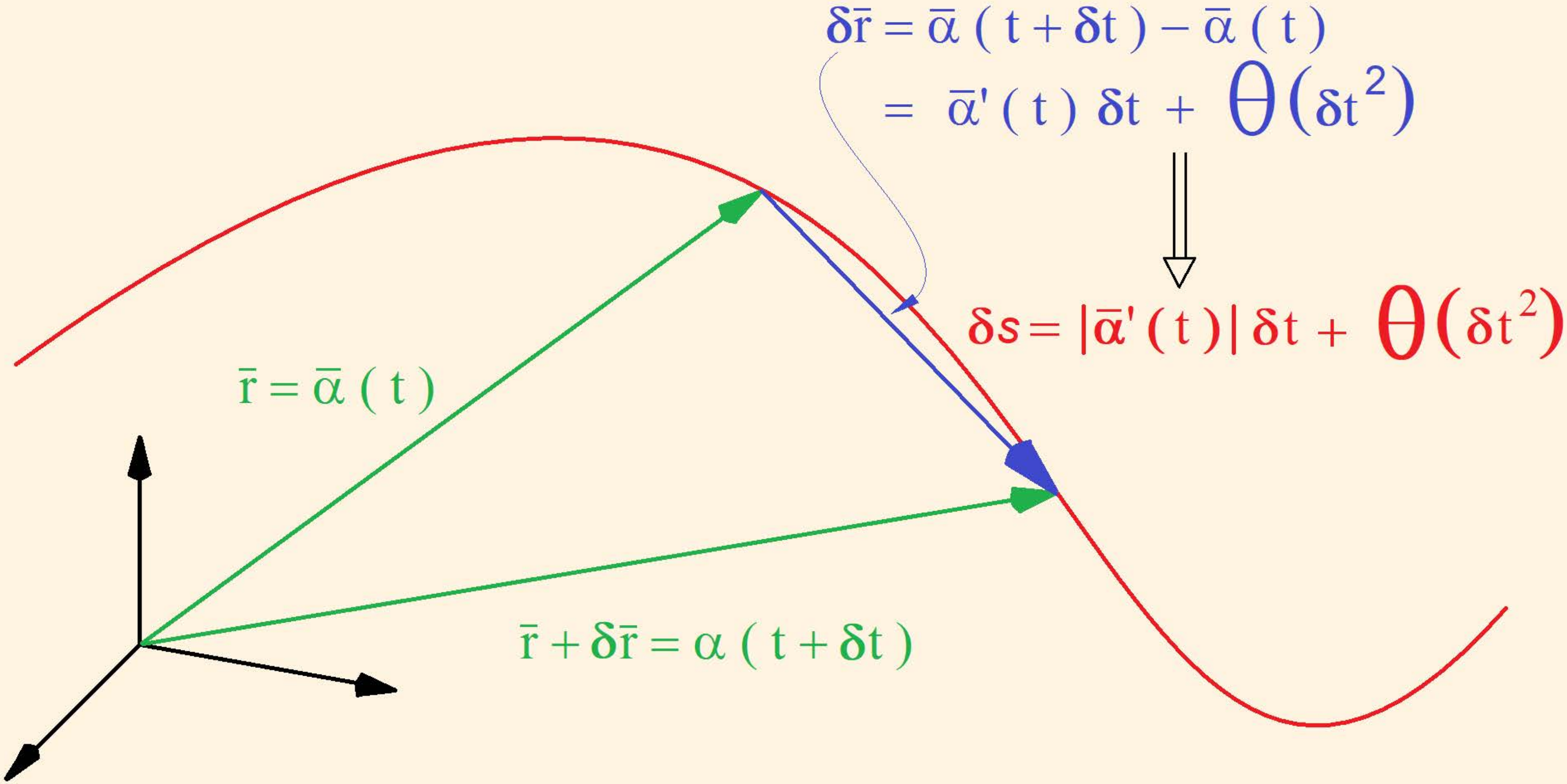
$$\boxed{\vec{r} = \vec{\alpha}(t) = \underset{\sim}{E}\, \bar{\alpha}(t)} \quad \text{con} \quad \underset{\sim}{E} = \begin{bmatrix} e^{\,1}_{\;1} & \cdots & e^{\,1}_{\;n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{\,n}_{\;1} & \cdots & e^{\,n}_{\;n} \end{bmatrix}, \quad \boxed{\bar{\alpha}(t) = \begin{Bmatrix} \alpha^{\,1}(t) \\ \vdots \\ \alpha^{\,n}(t) \end{Bmatrix}}$$

EXPRESIÓN GENERAL EN LA BASE CANÓNICA (ORTONORMAL): (*)

$$\boxed{\bar{r} = \bar{\alpha}(t)} \quad \text{con} \quad \boxed{\bar{\alpha}(t) = \left\{ \begin{array}{c} \alpha^{1}(t) \\ \vdots \\ \alpha^{n}(t) \end{array} \right\}}$$

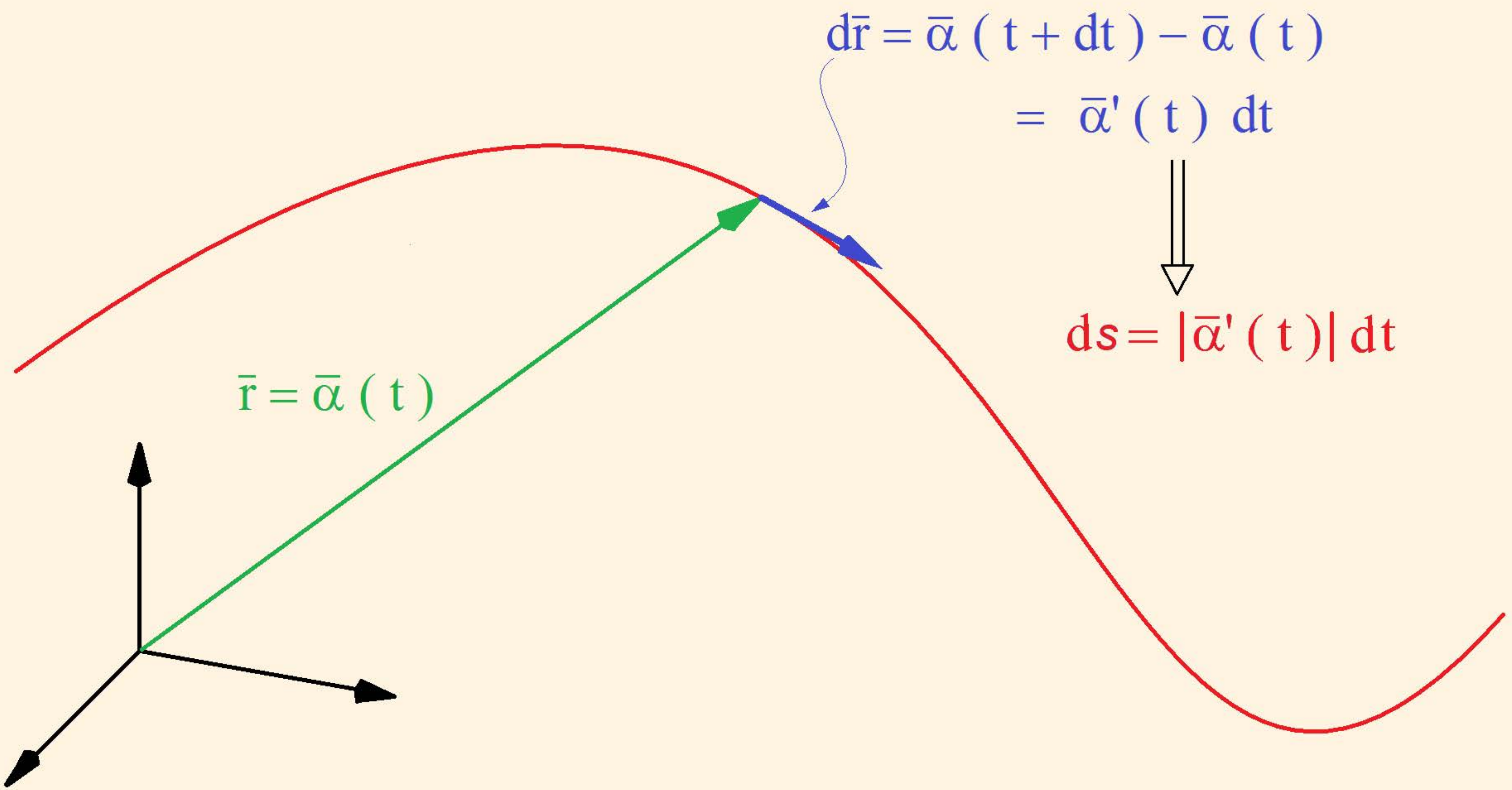
(*) Por tanto, $\vec{r} = \bar{r}$, y $\vec{\alpha}(t) = \bar{\alpha}(t)$.

Diferencial de arco y vector tangente (Ia)



DIFERENCIAL DE ARCO: PLANTEAMIENTO

Diferencial de arco y vector tangente (Ib)



DIFERENCIAL DE ARCO: DEFINICIÓN

Diferencial de arco y vector tangente (II)

LONGITUD DE ARCO:

$$s = \int_{t_{\mathrm{I}}}^{t_{\mathrm{F}}} |\bar{\alpha}\,'(t)|\, dt$$

$$\Downarrow$$

$$s'(t) = |\bar{\alpha}\,'(t)| \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{s(t) = \int_{t_{\mathrm{I}}}^{t} |\bar{\alpha}\,'(t)|\, dt} \qquad \text{(*)}$$

(*) Se supone $s(t_{\mathrm{I}}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \bar{r} = \bar{\alpha}(t_{\mathrm{I}})$ es el origen a efectos de la longitud de arco.

DIFERENCIAL DE ARCO:

$$d\bar{r} = \bar{\alpha}\,'(t)\; dt$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{ds = |\; d\bar{r}\; | = |\bar{\alpha}\,'(t)|\; dt}$$

VECTOR TANGENTE:

$$\bar{t} = \frac{\dfrac{d\bar{r}}{dt}}{\left|\dfrac{d\bar{r}}{dt}\right|} = \frac{\bar{\alpha}'(t)}{|\bar{\alpha}'(t)|} \qquad \Longrightarrow \qquad |\,\bar{t}\,| = 1$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\bar{t} = \frac{d\bar{r}}{ds}} \qquad \Longrightarrow \qquad |\,\bar{t}\,| = 1$$

Diferencial de arco y vector tangente (V)

REPARAMETRIZACIÓN EN FUNCIÓN DEL ARCO:

$$\bar{r} = \begin{cases} \bar{\alpha}(t) \quad \text{con} \quad \bar{\alpha}(t) = \bar{\beta}(s)\Big|_{s=s(t)} \\ \\ \bar{\beta}(s) \quad \text{con} \quad \bar{\beta}(s) = \bar{\alpha}(t)\Big|_{t=t(s)} \end{cases} \qquad (*)$$

(*) Donde $t(s)$ es la función inversa de $s(t)$.

La parametrización en función del arco se denomina **PARAMETRIZACIÓN NATURAL**

Diferencial de arco y vector tangente (VI)

NOTACIÓN ESPECIAL:

$$\bar{r}' = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\Big(\bar{\alpha}(t)\Big) \quad \Longleftrightarrow \quad \dot{\bar{r}} = \frac{d\bar{r}}{ds} = \frac{d}{ds}\Big(\bar{\beta}(s)\Big)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \bar{t} \quad = \dot{\bar{r}} = \bar{r}' \;/\; |\bar{r}'| \\ d\bar{r} = \bar{r}'\, dt = \;\dot{\bar{r}}\, ds \\ ds = |\bar{r}'|\, dt = \;\sqrt{\bar{r}' \cdot \bar{r}'}\;\; dt = \;\sqrt{d\bar{r} \cdot d\bar{r}} \end{cases}$$

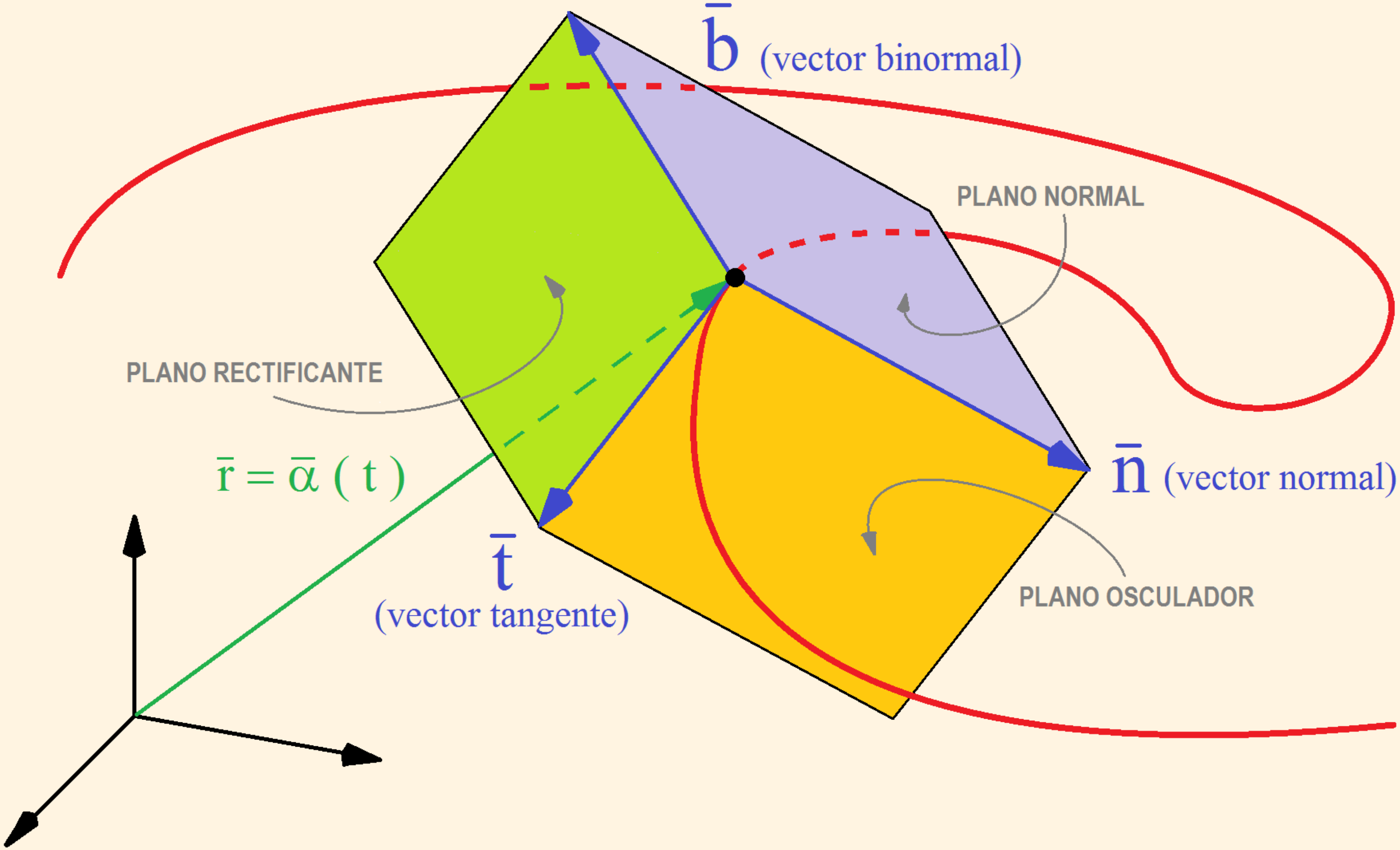
Diferencial de arco y vector tangente (VII)

RELACIÓN ENTRE DERIVADAS:

$$\begin{cases} \bar{r}' = \dot{\bar{r}}\, s' \\ \bar{r}'' = \ddot{\bar{r}}\, (s')^2 + \dot{\bar{r}}\, s'' \\ \bar{r}''' = \dddot{\bar{r}}\, (s')^3 + 3\, \ddot{\bar{r}}\, s'\, s'' + \dot{\bar{r}}\, s''' \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \dot{\bar{r}} = \bar{r}'\, \dot{t} \\ \ddot{\bar{r}} = \bar{r}''\, (\dot{t})^2 + \bar{r}'\, \ddot{t} \\ \dddot{\bar{r}} = \bar{r}'''\, (\dot{t})^3 + 3\, \bar{r}''\, \dot{t}\, \ddot{t} + \bar{r}'\, \dddot{t} \end{cases}$$



TRIEDRO DE FRENET

Triedro de Frenet (II)

VECTOR TANGENTE:

$$\bar{t} = \frac{d\bar{r}}{ds} \implies |\,\bar{t}\,| = 1$$

VECTOR NORMAL:

$$\bar{n} = \frac{1}{k}\,\frac{d\bar{t}}{ds} \quad \text{con} \quad k = \left|\,\frac{d\bar{t}}{ds}\,\right| \implies |\,\bar{n}\,| = 1 \quad (*)$$

VECTOR BINORMAL:

$$\bar{b} = \bar{t} \wedge \bar{n} \implies |\,\bar{b}\,| = 1$$

(*) Donde $k \geq 0$ es la **CURVATURA**, y $R = 1/k$ es el **RADIO DE CURVATURA**.

Triedro de Frenet (III)

DERIVADAS DE LOS VECTORES TANGENTE, NORMAL Y BINORMAL:

$$\boxed{\frac{d}{ds}\begin{bmatrix}\bar{t} & \bar{n} & \bar{b}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\bar{t} & \bar{n} & \bar{b}\end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -k & 0 \\ k & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix}} \quad (*)$$

(*) Donde τ es la **TORSIÓN**, y $T = 1/\tau$ es el **RADIO DE TORSIÓN**.

Esta expresión indica que al avanzar ds, el triedro experimenta los siguientes giros:

$$\begin{cases} d\phi = \tau\ ds & \text{en torno a la tangente} \iff ds = T\ d\phi \\ d\theta = k\ ds & \text{en torno a la binormal} \iff ds = R\ d\theta \end{cases}$$

OBTENCIÓN DEL TRIEDRO:

Procedimiento directo $[\bar{t} \to \bar{n} \to \bar{b}]$

$$\left. \begin{cases} \bar{r} = \bar{\beta}(s) \Rightarrow \boxed{\bar{t} = \dot{\bar{r}}} \quad \to \boxed{k\,\bar{n} = \ddot{\bar{r}}} \\ \bar{r} = \bar{\alpha}(t) \Rightarrow \boxed{|\bar{r}'|\,\bar{t} = \bar{r}'} \to \boxed{k\,\bar{n} = \frac{1}{|\bar{r}'|^4}\left(-(\bar{r}' \cdot \bar{r}'')\,\bar{r}' + |\bar{r}'|^2\,\bar{r}''\right)} \end{cases} \right\} \to \boxed{\bar{b} = \bar{t} \wedge \bar{n}}$$

Procedimiento alternativo $[\bar{t} \to \bar{b} \to \bar{n}]$ (*)

$$\bar{r} = \bar{\alpha}(t) \Longrightarrow \boxed{|\bar{r}'|\,\bar{t} = \bar{r}'} \longrightarrow \boxed{k\,\bar{b} = \frac{1}{|\bar{r}'|^3}\left(\bar{r}' \wedge \bar{r}''\right)} \longrightarrow \boxed{\bar{n} = \bar{b} \wedge \bar{t}}$$

(*) En el caso general (cuando el parámetro no es el arco) estos cálculos son potencialmente más sencillos.

Cálculo de la curvatura y la torsión

CURVATURA:

$$\begin{cases} \bar{r} = \bar{\beta}(s) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{k = \left| \ddot{\bar{r}} \right| = \left| \dot{\bar{r}} \wedge \ddot{\bar{r}} \right|} \quad \rightarrow \ k \geq 0 \\ \bar{r} = \bar{\alpha}(t) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{k = \dfrac{\left| \bar{r}' \wedge \bar{r}'' \right|}{\left| \bar{r}' \right|^3}} \quad \rightarrow \ k \geq 0 \end{cases}$$

TORSIÓN:

$$\begin{cases} \bar{r} = \bar{\beta}(s) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\tau = \dfrac{\left[\dot{\bar{r}}\,, \ddot{\bar{r}}\,, \dddot{\bar{r}} \right]}{\left| \dot{\bar{r}} \wedge \ddot{\bar{r}} \right|^2} = \dfrac{\left[\dot{\bar{r}}\,, \ddot{\bar{r}}\,, \dddot{\bar{r}} \right]}{k^2}} \\ \bar{r} = \bar{\alpha}(t) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\tau = \dfrac{\left[\bar{r}', \bar{r}'', \bar{r}''' \right]}{\left| \bar{r}' \wedge \bar{r}'' \right|^2} = \dfrac{\left[\bar{r}', \bar{r}'', \bar{r}''' \right]}{k^2 \left| \bar{r}' \right|^6}} \end{cases}$$

RECTA TANGENTE: (*)

$$\bar{r} = \bar{r}_{\mathrm{o}} + \lambda\, \bar{t}_{\mathrm{o}}$$

PLANO NORMAL: (*)

$$\bar{r} = \bar{r}_{\mathrm{o}} + \lambda\, \bar{n}_{\mathrm{o}} + \mu\, \bar{b}_{\mathrm{o}} \iff (\bar{r} - \bar{r}_{\mathrm{o}}) \cdot \bar{t}_{\mathrm{o}} = 0$$

(*) $s = s_{\mathrm{o}} \;\; \rightarrow \;\; \bar{r} = \bar{r}_{\mathrm{o}},\; \bar{t} = \bar{t}_{\mathrm{o}},\; \bar{n} = \bar{n}_{\mathrm{o}},\; \bar{b} = \bar{b}_{\mathrm{o}}$

Contacto (II)

PLANO OSCULADOR: (*)

$$\bar{r} = \bar{r}_o + \lambda\, \bar{t}_o + \mu\, \bar{n}_o \quad \Longleftrightarrow \quad (\bar{r} - \bar{r}_o) \cdot \bar{b}_o = 0$$

PLANO RECTIFICANTE: (*)

$$\bar{r} = \bar{r}_o + \lambda\, \bar{t}_o + \mu\, \bar{b}_o \quad \Longleftrightarrow \quad (\bar{r} - \bar{r}_o) \cdot \bar{n}_o = 0$$

(*) $s = s_o \quad \rightarrow \quad \bar{r} = \bar{r}_o,\ \bar{t} = \bar{t}_o,\ \bar{n} = \bar{n}_o,\ \bar{b} = \bar{b}_o$

Contacto (III)

CIRCUNFERENCIA OSCULATRIZ: (*)

$$\left(\bar{r}-\bar{r}_c\right)\cdot\left(\bar{r}-\bar{r}_c\right)=R_c^2, \quad \text{con} \quad \begin{cases} \left(\bar{r}-\bar{r}_o\right)\cdot\bar{b}_o=0 & \text{(situada en el plano osculador)} \\ \bar{r}_c=\bar{r}_o+R_c\,\bar{n}_o & \text{(centro)} \\ R_c=\dfrac{1}{k_o} & \text{(radio)} \end{cases}$$

ESFERA OSCULATRIZ: (*)

$$\left(\bar{r}-\bar{r}_e\right)\cdot\left(\bar{r}-\bar{r}_e\right)=R_e^2, \quad \text{con} \quad \begin{cases} \bar{r}_e=\bar{r}_o+\left(\dfrac{1}{k_o}\right)\bar{n}_o+\left(\dfrac{-\dot{k}_o}{k_o^2\,\tau_o}\right)\bar{b}_o & \text{(centro)} \\ R_e=\sqrt{\left(\dfrac{1}{k_o}\right)^2+\left(\dfrac{-\dot{k}_o}{k_o^2\,\tau_o}\right)^2} & \text{(radio)} \end{cases}$$

(*) $s=s_o \;\rightarrow\; \bar{r}=\bar{r}_o,\ \bar{t}=\bar{t}_o,\ \bar{n}=\bar{n}_o,\ \bar{b}=\bar{b}_o,\ k=k_o,\ \dot{k}=\dot{k}_o,\ \tau=\tau_o,$

ECUACIONES INTRÍNSECAS:

Las funciones $k(s) > 0, \quad \tau(s)$

con las condiciones iniciales

$$\left\{ \begin{array}{ll} \bar{\beta}(s_{\rm o}) = \bar{r}_{\rm o} & \\ \bar{t}(s_{\rm o}) = \bar{t}_{\rm o} & \\ \bar{n}(s_{\rm o}) = \bar{n}_{\rm o}, & \bar{n}_{\rm o} \perp \bar{t}_{\rm o} \\ \bar{b}(s_{\rm o}) = \bar{t}_{\rm o} \wedge \bar{n}_{\rm o} & \end{array} \right\}$$

determinan totalmente la curva $\bar{r} = \bar{\beta}(s)$ tal que $\left\{ \begin{array}{ll} \text{su curvatura es} & k(s) \\ \text{su torsión es} & \tau(s) \end{array} \right.$

Integral a lo largo de una curva

Dada la curva $C \equiv \left\{\bar{r} = \bar{\alpha}(t),\ t \in [t_{\mathrm{I}}, t_{\mathrm{F}}]\right\} \rightarrow s_{\mathrm{I}} = s(t_{\mathrm{I}}), s_{\mathrm{F}} = s(t_{\mathrm{F}})$, (*)

CAMPO ESCALAR $f(\bar{r})$:

$$\int_C f\, ds = \int_{s_{\mathrm{I}}}^{s_{\mathrm{F}}} \left(f(\bar{r})\Big|_{\bar{r}=\bar{\beta}(s)} \right) ds = \int_{t_{\mathrm{I}}}^{t_{\mathrm{F}}} \left(f(\bar{r})\Big|_{\bar{r}=\bar{\alpha}(t)} \right) \left| \bar{\alpha}'(t) \right| dt$$

CAMPO VECTORIAL $\bar{f}(\bar{r})$:

$$\int_C \bar{f} \cdot d\bar{r} = \int_{s_{\mathrm{I}}}^{s_{\mathrm{F}}} \left(\bar{f}(\bar{r})\Big|_{\bar{r}=\bar{\beta}(s)} \right) \cdot \bar{t}\ \ ds = \int_{t_{\mathrm{I}}}^{t_{\mathrm{F}}} \left(\bar{f}(\bar{r})\Big|_{\bar{r}=\bar{\alpha}(t)} \right) \cdot \bar{\alpha}'(t)\ \ dt$$

(*) Si la curva es cerrada se utiliza el símbolo $\oint \Longrightarrow$ **INTEGRAL CIRCULAR**

Algunos problemas clásicos

Involuta o Evolvente: (anti-evoluta)

$$\bar{r} = \bar{\beta}(s) \quad \longrightarrow \quad \bar{r} = \bar{\beta}(s) + (c - s)\,\bar{t}(s) \quad (*)$$

Evoluta: (anti-involuta)

$$\bar{r} = \bar{\beta}(s) \quad \longrightarrow \quad \bar{r} = \bar{\beta}(s) + \frac{1}{k(s)}\,\bar{n}(s) + \frac{1}{k(s)}\,\cot\left(\int \tau(s)ds + \text{constante}\right)\,\bar{b}(s)$$

Envolvente: (de una familia de curvas planas)

$$\begin{cases} F(x,y,\lambda) = 0 & \longrightarrow \quad F(x,y,\lambda) = 0, \quad \dfrac{\partial}{\partial\lambda}F(x,y,\lambda) = 0 \\[2ex] \bar{r} = \bar{\alpha}(t,\lambda) & \longrightarrow \quad \dfrac{\partial}{\partial\lambda}\bar{\alpha}(t,\lambda) \;\Big\|\; \dfrac{\partial}{\partial t}\bar{\alpha}(t,\lambda) \end{cases}$$

(*) Para cada valor del parámetro c se obtiene una involuta diferente.

Estudio particular de curvas planas (I)

CURVA PLANA:

$$\bar{r} = \bar{\alpha}(t) \quad \text{con} \quad \big(\bar{r} - \bar{r}_a\big) \cdot \bar{p} = 0, \quad \text{donde} \quad \begin{cases} \bar{r}_a \equiv \text{un punto del plano} \\ \bar{p} \;\; \equiv \text{vector normal al plano} \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\tau(t) = 0 \quad \forall t$$

REPRESENTACIÓN EN EXPLÍCITAS:

$$y = f(x)$$

Estudio particular de curvas planas (II)

PARAMETRIZACIÓN TRIVIAL:

$$y = f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \bar{r} = \bar{\alpha}(x) \quad \text{con} \quad \bar{\alpha}(x) = \left\{ \begin{matrix} x \\ f(x) \\ 0 \end{matrix} \right\}$$

DIFERENCIAL DE ARCO:

$$ds = \sqrt{1 + \Big(f'(x)\Big)^2}\, dx$$

Estudio particular de curvas planas (III)

VECTOR TANGENTE:

$$\bar{t} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}} \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ f'(x) \\ 0 \end{array} \right\}$$

CURVATURA Y VECTOR NORMAL:

$$k = \frac{\left| f''(x) \right|}{\left(1 + \left(f'(x)\right)^2\right)^{3/2}}, \qquad \bar{n} = \frac{\operatorname{sgn}\left(f''(x)\right)}{\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}} \left\{ \begin{array}{c} -f'(x) \\ 1 \\ 0 \end{array} \right\}$$