MOMENTOS DE VARIABLES ALEATORIAS. FORMULACIÓN GENERAL (I)

Nota: desarrollaremos la formulación para el caso de variables continuas. En el caso de variables discretas, el desarrollo es estrictamente paralelo.

1.- Momentos absolutos

Se denomina momento absoluto de orden n de una variable aleatoria X, definida en R_x, y con función de densidad $f_X(x)$, a

$$\nu_x^n = E[X^n]$$

donde $E[*]$ representa el operador "Esperanza Matemática"', definido como

$$E[g(X)] = \int_{R_x} g(x)\ f_X(x)dx$$

siempre que esta integral sea absolutamente convergente.

2.- Momentos centrales

Se denomina momento central de orden n de una variable aleatoria X, definida en R_x, y con función de densidad $f_X(x)$, a

$$\mu_x^n = E[(X - E[X])^n] = \int_{R_x} (x - E[X])^n\ f_X(x)dx$$

siempre que esta integral sea absolutamente convergente.

Nótese que el momento central de orden uno siempre es nulo y que, si la variable aleatoria es simétrica, lo son también todos los momentos centrales de orden impar.

ESPERANZA MATEMÁTICA O MEDIA DE UNA VARIABLE ALEATORIA

Se denomina esperanza matemática o media de una variable aleatoria al momento absoluto de primer orden de dicha variable, es decir

$$E[X] = m_x = \nu_x^1 = \int_{R_x} x\ f_X(x)dx$$

siempre que esta integral sea absolutamente convergente.
El operador "esperanza matemática" es, obviamente, un operador lineal, y por tanto

a) $E[a] = a$ si a es una constante.
b) $E[bX] = bE[X]$ si b es una constante.
c) $E[a + bX] = a + bE[X]$ si a y b son constantes.
d) $E[g_1(X) + g_2(X)] = E[g_1(X)] + E[g_2(X)]$.

La esperanza matemática $E[X]$, si existe, representa la abcisa del centro de gravedad del área definida en R_X por la función de densidad de la variable y el eje de abcisas.

Obsérvese que la notación $E[X]$ es equivalente a m_x, representando en ambos caso la esperanza matemática de la variable.

VARIANZA DE UNA VARIABLE ALEATORIA

Se denomina varianza de una variable aleatoria al momento central de segundo orden de dicha variable, es decir

$$Var[X] = \sigma_x^2 = \mu_x^2 = E[(X - E[X])^2] = \int_{R_x} (x - E[X])^2\ f_X(x)dx$$

siempre que esta integral sea absolutamente convergente.

Las siguientes propiedades de la varianza son fácilmente comprobables:

a) $Var[a] = 0$ si a es una constante.
b) $Var[bX] = b^2 Var[X]$ si b es una constante.
c) $Var[a + bX] = b^2 Var[X]$ si a y b son constantes.

La varianza $Var[X]$, si existe, representa el momento de inercia del área definida en R_X por la función de densidad de la variable y el eje de abcisas, con respecto al eje vertical que pasa por el punto definido por la esperanza matemática. Por consiguiente, la varianza es una medida de la "dispersión" u "homogeneidad" de la variable aleatoria en cuestión.

Obsérvese que la notación $Var[X]$ es equivalente a σ_x^2, representando en ambos casos la varianza de la variable.

Una forma sencilla de calcular la varianza es $Var[X] = E[X^2] - E^2[X]$

MOMENTOS DE VARIABLES ALEATORIAS. FORMULACIÓN GENERAL (II)

OTRAS CONSTANTES RELACIONADAS CON MOMENTOS

1.- Desviación típica

$\sigma_x = +\sqrt{\sigma_x^2}$

2.- Coeficiente de deformación

$\gamma_1 = \frac{\mu_x^3}{\sigma_x^3}$. Mide la asimetría hacia la derecha (γ_1 positivo) o hacia la izquierda (γ_1 negativo) de la función de densidad.

3.- Coeficiente de aplastamiento o kurtosis

$\gamma_2 = \frac{\mu_x^4}{\sigma_x^4}$. Es otra medida de la dispersión de la variable aleatoria.

4.- Coeficiente de variación

$V_x = \frac{\sigma_x}{m_x}$. Es otra medida de la dispersión de la variable aleatoria. Otras notaciones son C_x o CV_x.

OTRAS CONSTANTES ÚTILES

1.- Mediana

Se denomina mediana, $\breve{m}_x$, a aquel valor de la variable aleatoria tal que $F_X(\breve{m}_x) = \frac{1}{2}$.

2.- Moda

Se denomina moda, μ_x, a aquel valor de la variable aleatoria que hace máxima la función de densidad. Otras notaciones son M o M_0

MOMENTOS CONDICIONALES

En general, se denomina esperanza matemática de una función $g(X)$ de una variable aleatoria X, dado el suceso A, a

$$E[g(X)|A] = \int_{R_{x|A}} g(x) f_{X|A}(x)dx$$

Ejemplos

$E[X|Y] = \int_{R_{x|y}} x f_{X|Y}(x,y)dx$

$E[X|X > x_o] = \int_{x_o}^{\infty} x f_{X|X>x_o}(x)dx$

$Var[X|X > x_o] = \int_{x_o}^{\infty} (x - E[X|X > x_o])^2 f_{X|X>x_o}(x)dx$

MOMENTOS DE FUNCIONES DE DOS VARIABLES ALEATORIAS

Se denomina "Esperanza Matemática" de una función $g(X, Y)$ de dos variables aleatorias X e Y, con función de densidad conjunta $f_{XY}(x, y)$ y rango conjunto R_{xy} conocidos, a

$$E[g(X,Y)] = \int\int_{R_{xy}} g(x,y)\ f_{XY}(x,y)\ dxdy$$

COVARIANZA

Dadas dos variables aleatorias, X e Y, con función de densidad conjunta $f_{XY}(x, y)$ y rango conjunto R_{xy}, se denomina covarianza de ambas variables a

$$COV[X,Y] = \sigma_{xy} = E\Big[(X - E[X])(Y - E[Y])\Big] = \int_{R_{xy}} (x - E[X])(y - E[Y])\ f_{XY}(x,y)dx\ dy$$

La covarianza es una medida de la dependencia lineal de dos variables aleatorias.
Una forma sencilla de calcular la covarianza es $COV[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$.

Obsérvese que la notación $COV[XY]$ es equivalente a σ_{xy}, representando en ambos casos la covarianza de las variables.
Si dos variables aleatorias son independientes, su covarianza es cero.

Coeficiente de correlación

Se denomina coeficiente de correlación a $\rho_{xy} = \frac{COV[XY]}{\sigma_x \sigma_y}$. El coeficiente de correlación es adimensional y tal que $-1 \leq \rho_{xy} \leq 1$.

MOMENTOS DE VARIABLES ALEATORIAS. FORMULACIÓN GENERAL (III)

MOMENTOS DE OPERACIONES ARITMÉTICAS ENTRE VARIABLES ALEATORIAS

Ejemplos

1. Suma

$E[X+Y] = E[X] + E[Y]$

$Var[X+Y] = Var[X] + Var[X] + 2COV[XY]$. Si independientes $\Rightarrow$ $Var[X+Y] = Var[X] + Var[X]$

2. Resta

$E[X-Y] = E[X] - E[Y]$

$Var[X-Y] = Var[X] + Var[X] - 2COV[XY]$. Si independientes $\Rightarrow$ $Var[X-Y] = Var[X] + Var[X]$

3. Producto

$E[XY] = E[X]E[Y] + COV[XY]$. Si independientes $\Rightarrow$ $E[XY] = E[X]E[Y]$

Si independientes $\Rightarrow$ $Var[XY] = Var[X]Var[Y] + Var[X]E[Y]^2 + Var[Y]E[X]^2$

OTRAS EXPRESIONES ÚTILES

Si un conjunto de sucesos A_i, $i = 1, 2, 3, ..., n$ son tales que $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$, y $A_i \bigcap A_j = \phi \;\; \forall i \neq j$, entonces se verifica

$$E[g(X)] = \sum_{i=1}^{n} E[g(X)|A_i]P[A_i]$$

que es una obvia extensión del teorema de probabilidad total.