Variables aleatorias
CPE

29 de setiembre y 3 de octubre de 2011

Recordatorio

(E, Σ, P) espacio de probabilidad

E es un conjunto (llamado **espacio total**); Σ es una familia de subconjuntos de E (los **sucesos**) con estructura de σ-álgebra; P es una función real (llamada **probabilidad**) definida en Σ que cumple

- P toma valores mayores o iguales que cero
- la probabilidad de E es 1
- la probabilidad de la unión de una sucesión finita o infinita de sucesos disjuntos dos a dos es la suma de sus probabilidades.

Ejemplos de espacios de probabilidad

- De las 100 piezas de un lote, 25 son defectuosas y 75 son buenas. Se extraen sucesivamente y al azar dos de ellas para montar una determinada componente. Describir el espacio de probabilidad asociado a este experimento aleatorio.

  Espacio total: $E = \{bb, bd, db, dd\}$

  $\Gamma =$ los 16 subconjuntos de E.

  Hay que definir P para los 16 sucesos.

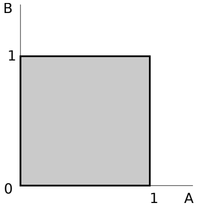
  Ejemplo:
  $P[\text{"alguna pieza es defectuosa"}] = P[\{bd, db, dd\}] =$
  $P[\{bd\}] + P[\{db\}] + P[\{dd\}] = \frac{75}{100} \cdot \frac{25}{99} + \frac{25}{100} \cdot \frac{75}{99} + \frac{25}{100} \cdot \frac{24}{99}$
  En general: $P[S]$ es la suma de las probabilidades de los elementos de S, luego sólo necesitamos conocer estas probabilidades:

  $P[\{bb\}] = \frac{75}{100} \cdot \frac{74}{99}, \quad P[\{bd\}] = \frac{75}{100} \cdot \frac{25}{99},$
  $P[\{db\}] = \frac{25}{100} \cdot \frac{75}{99}, \quad P[\{dd\}] = \frac{25}{100} \cdot \frac{24}{99}$

Ejemplos de espacios de probabilidad

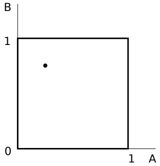
- Dos personas (A y B) llegan a una oficina municipal, independientemente y al azar entre las 12 y la 1. Describir el espacio de probabilidad asociado a este experimento aleatorio.

  Si contamos los tiempos en horas transcurridas desde las doce, la hora A de llegada de A y la hora B de llegada de B son números entre 0 y 1. Para representar simultáneamente los dos necesitamos pares ordenados, es decir, el espacio total puede identificarse con el cuadrado $E = [0, 1] \times [0, 1]$.

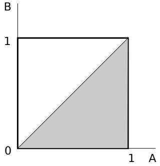


Ejemplos de espacios de probabilidad

El suceso "A llega a las 12:15 y B llega a las 12:45" es el punto que marcamos en el dibujo:



Éste es un suceso simple. Pero un suceso es un subconjunto del espacio total, que no tiene por qué estar formado por un solo elemento. Por ejemplo, el suceso "A llega después de B" se representa así:

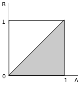


Ejemplos de espacios de probabilidad

Luego en este caso $E = [0,1] \times [0,1]$

$\Gamma =$subconjuntos de E (*)

Tenemos que definir P sobre todos estos (infinitos) sucesos.

Por ejemplo, resulta natural que la probabilidad del suceso "A llega después de B" 

sea 1/2. En general tiene sentido definir la probabilidad de un suceso simplemente como su área.

$P[S] = \text{área}(S)$

(*) Hay subconjuntos del cuadrado unidad que no tienen un área bien definida. Por eso estrictamente Γ no puede incluir *todos* los subconjuntos de E, sólo los que tienen área. (Éste es un matiz técnico que no nos va a importar demasiado.)

Definición de variable aleatoria

Definición de variable aleatoria.

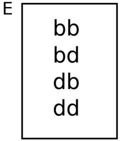
Definición informal: Una variable aleatoria es el resultado numérico de un experimento aleatorio.

Ejemplos:

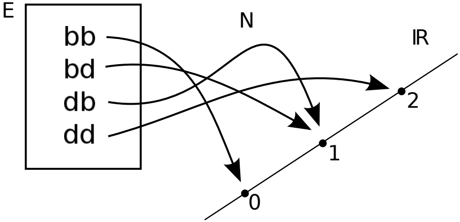
- En el caso de las piezas, podemos definir $N =$"número de piezas defectuosas entre las dos escogidas".
- En el ejemplo continuo: definimos $H =$"hora de llegada del que llega primero".

Definición de variable aleatoria

Recordemos el espacio total del E. A. de las piezas.



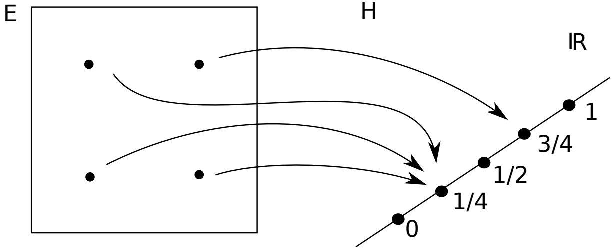
A cada uno de los elementos de E podemos asociarle un valor de $N =$"número de piezas defectuosas".



Entonces N es una aplicación de E en $\mathbb{R}$.

Definición de variable aleatoria

Análogamente en el caso de $H =$"hora de llegada del que llega primero",



Definición de variable aleatoria

Por eso se dice que

- si E es el espacio total asociado a un experimento aleatorio, una variable aleatoria sobre E es una aplicación $X : E \to \mathbb{R}$.

Ésta es la definición formal de variable aleatoria.

Espacio de probabilidad definido por una variable aleatoria

Al fijarnos en la variable aleatoria en vez de en el espacio total es frecuente que perdamos información:

- si nos dicen que $N = 1$ no sabemos si el resultado ha sido *bd* ó *db*;
- si nos dicen que $H = 1/2$ lo único que sabemos es que el primero en llegar ha llegado a las 12:30 pero no quién ha sido, ni a qué hora ha llegado el segundo entre las 12:30 y las 13:00.

Pero si hemos definido una variable aleatoria X es precisamente porque sólo nos interesa la información contenida en ella.

- Es decir, sólo queremos considerar las probabilidades de los sucesos que son **definibles en términos de X.**

Espacio de probabilidad definido por una variable aleatoria

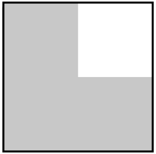
Ejemplo: el suceso $\{bd, db\}$ es definible en términos de N (es el suceso $[N = 1]$)

El suceso $\{bb, db, bd\}$ es definible en términos de N (es el suceso $[N \leq 1]$).

El suceso "la primera pieza es defectuosa", $\{db, dd\}$ no es definible en términos de N.

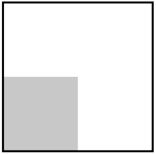
Espacio de probabilidad definido por una variable aleatoria

El suceso "el primero llega en la primera media hora"



es definible en términos de H: es el suceso $[H \leq 0'5]$

El suceso "los dos llegan en la primera media hora"



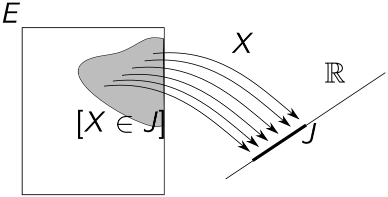
no es definible en términos de H.

Espacio de probabilidad definido por una variable aleatoria

En general llamamos sucesos definibles en términos de la variable aleatoria $X : E \to \mathbb{R}$ a los que son de la forma $[X \in J]$ donde J es un subconjunto de $\mathbb{R}$.

Por ejemplo el suceso $[N \leq 1]$ se puede escribir como $[N \in (-\infty, 1]]$. El suceso $[N = 1]$ como $[N \in \{1\}]$, etc.

Si definimos una variable aleatoria, es porque consideramos que éstos son los únicos sucesos de interés para el problema que estamos resolviendo.



(A veces se escribe $X^{-1}(J)$ en lugar de $[X \in J]$). Trasladamos el espacio total a $\mathbb{R}$ y los sucesos son subconjuntos J de la recta real.

Espacio de probabilidad definido por una variable aleatoria

Sea (E, Γ, P) el espacio de probabilidad asociado a un experimento aleatorio. Sea $X : E \to \mathbb{R}$ una variable aleatoria. La información relevante sobre X se limita a las probabilidades de la forma $P[X \in J]$ donde J es un subconjunto de $\mathbb{R}$. (Basta trabajar con intervalos.)

Esto nos permite abstraernos del experimento aleatorio y trabajar con un espacio de probabilidad en el que los sucesos son subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Rango de una variable aleatoria

Se llama rango R_X de una variable aleatoria X al conjunto imagen de la aplicación X, es decir, el conjunto de todos los valores que puede tomar X. Ejemplos: el rango de N es $\{0, 1, 2\}$; el de H, el intervalo $[0, 1]$.

Función de distribución acumulada

Sea $X : E \to \mathbb{R}$ una variable aleatoria. Para cada $x \in \mathbb{R}$ podemos calcular $P[X \leq x] = P[X \in J]$ donde $J = (-\infty, x]$. El resultado es un número real entre 0 y 1 (una probabilidad)

Si hacemos esto para todo $x \in \mathbb{R}$, estaremos definiendo la función de distribución acumulada F_X de la variable aleatoria X:

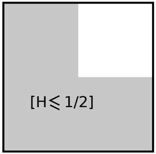
- $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F_X(x) = P[X \leq x]$ para todo x

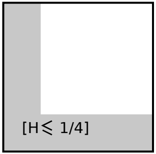
Función de distribución acumulada

Vamos a calcular F_N y F_H.

$F_H(h) = P[H \leq h]$, entonces: Por ejemplo,

$P[H \leq 1/2] =??$ $\quad$ $P[H \leq 1/4] =??$





$P[H \leq 1/2] = 1 - (1/2)^2 \quad P[H \leq 1/4] = 1 - (3/4)^2$

En general, para un h entre 0 y 1

$P[H \leq h] = 1 - (1-h)^2 = 2h - h^2$

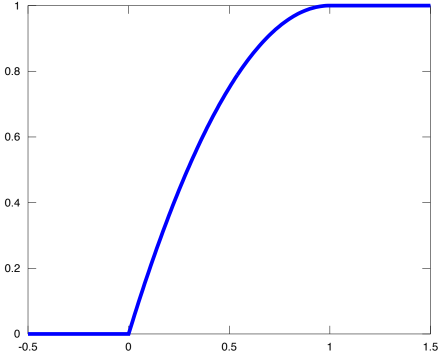
Si $h < 0$, entonces $P[H \leq h] = 0$ (suceso imposible). Si $h > 1$ entonces $P[H \leq h] = 1$ (suceso seguro).

Función de distribución acumulada

En definitiva:

$$F_H(h) = \begin{cases} 0 & (h < 0) \\ 2h - h^2 & (0 \leq h < 1) \\ 1 & (h \geq 1) \end{cases}$$

Representación gráfica:



Función de distribución acumulada

En el E. A. de las piezas:

sucesos simples	bb	bd	db	dd
probabilidades	$\frac{75}{100} \cdot \frac{74}{99}$	$\frac{75}{100} \cdot \frac{25}{99}$	$\frac{25}{100} \cdot \frac{75}{99}$	$\frac{25}{100} \cdot \frac{24}{99}$

es decir (aproximadamente):

sucesos simples	bb	bd	db	dd
probabilidades	$0'561$	$0'189$	$0'189$	$0'061$

Por tanto $P[N = 0] = 0'561$, $P[N = 1] = 0'378$,
$P[N = 2] = 0'061$.

Función de distribución acumulada

$P[N=0]=0'561$, $P[N=1]=0'378$, $P[N=2]=0'061$.

Queremos calcular $F_N(n)=P[N\leq n]$ para todo $n\in\mathbb{R}$.

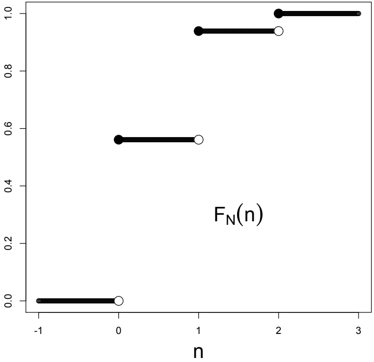
- Si $n<0$, $P[N\leq n]=0$ (suceso imposible)
- Si $0\leq n<1$, $P[N\leq n]=P[N=0]=0'561$
- Si $1\leq n<2$,
  $P[N\leq n]=P[N=0]+P[N=1]=0'561+0'378$
- Si $n\geq 2$, $P[N\leq n]=1$

$$F_N(n)=\begin{cases}0 & (n<0)\\ 0'561 & (0\leq n<1)\\ 0'939 & (1\leq n<2)\\ 1 & (n\geq 2)\end{cases}$$

Función de distribución acumulada

$$F_N(n) = \begin{cases} 0 & (n < 0) \\ 0'561 & (0 \leq n < 1) \\ 0'939 & (1 \leq n < 2) \\ 1 & (n \geq 2) \end{cases}$$

Representación gráfica:



Propiedades de la función de distribución acumulada

Si X es una variable aleatoria cualquiera, su función de distribución F_X cumple las siguientes propiedades:

1. F_X es monótona creciente
2. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$
3. F_X es continua por la derecha, es decir, para cualquier $a \in \mathbb{R}$ se cumple
$$\lim_{x \to a^+} F_X(x) = F_X(a)$$

Cualquier función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que cumpla estas tres condiciones es la función de distribución de alguna variable aleatoria.

Propiedades de la función de distribución acumulada

1. F_X es monótona creciente

   (no en sentido estricto: si $x_1 < x_2$ entonces $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$.)
2. $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$

   (tiene como asíntota horizontal a $y = 0$ por la izquierda y a $y = 1$ por la derecha. Si el rango está acotado, la función se acaba confundiendo con su asíntota, como ocurre en los dos ejemplos que hemos visto.)
3. F_X es continua por la derecha, es decir, para cualquier $a \in \mathbb{R}$ se cumple

$$\lim_{x\to a^+} F_X(x) = F_X(a)$$

   (esto no quiere decir que F_X sea continua: lo es por la derecha, es decir, toma en cada punto el valor al que tienden las imágenes de los puntos un poco a la derecha de él.)

Probabilidades asociadas a X expresadas en función de F_X

La función de distribución acumulada F_X almacena toda la información relevante sobre la variable aleatoria X.

Eso quiere decir que dado cualquier intervalo $J \subset \mathbb{R}$ debe ser posible expresar la probabilidad $P[X \in J]$ en términos sólo de F_X.

Por ejemplo, si J es de la forma $(-\infty, a]$:

$P[X \in (-\infty, a]] = P[X \leq a] = F_X(a)$ directamente de la definición.

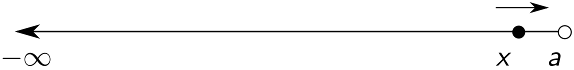
- ¿Y si $J = (-\infty, a)$? ¿Cómo recuperamos $P[X < a]$ a partir de F_X?

  Se cumple $P[X < a] = F_X(a^-)$.

Probabilidades asociadas a X expresadas en función de F_X

Explicación:

Aproximamos la semirrecta $(-\infty, a)$ por las de la forma $(-\infty, x]$ donde $x < a$.

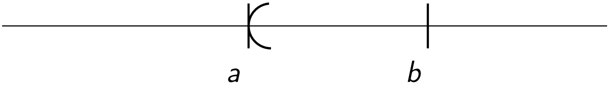


De los axiomas de la probabilidad se puede deducir que $P[X < a] = \lim_{x \to a^-} P[X \leq x]$.

Por tanto $P[X < a] = \lim_{x \to a^-} F_X(x) = F_X(a^-)$.

Probabilidades asociadas a X expresadas en función de F_X

- Si $J = (-\infty, a]$, $P[X \in (-\infty, a]] = P[X \leq a] = F_X(a)$
- Si $J = (a, \infty)$,
  $P[X \in (a, \infty)] = P[X > a] = 1 - P[X \leq a] = 1 - F_X(a)$
- Si $J = (a, b]$, $P[X \in (a, b]] = P[a < X \leq b] = F_X(b) - F_X(a)$
  ya que $(a, b] = (-\infty, b] \setminus (-\infty, a]$



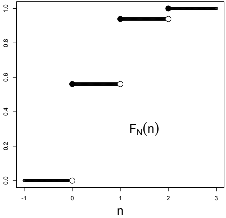
Probabilidades asociadas a X expresadas en función de F_X

- Si $J = (-\infty, a)$, $P[X \in (-\infty, a)] = P[X < a] = F_X(a^-)$
- Si $J = [a, \infty)$,
  $P[X \in [a, \infty)] = P[X \geq a] = 1 - P[X < a] = 1 - F_X(a^-)$
- Si $J = [a, b)$, $P[X \in [a, b)] = P[a \leq X < b]$
  $= P[X < b] - P[X < a] = F_X(b^-) - F_X(a^-)$
- Si $J = (a, b)$, $P[X \in (a, b)] = P[a < X < b]$
  $= P[X < b] - P[X \leq a] = F_X(b^-) - F_X(a)$
- Si $J = [a, b]$, $P[X \in [a, b]] = P[a \leq X \leq b]$
  $= P[X \leq b] - P[X < a] = F_X(b) - F_X(a^-)$
  - En particular si $J = \{a\} = [a, a]$, $P[X = a] = F_X(a) - F_X(a^-)$

Probabilidades asociadas a X expresadas en función de F_X

Por ejemplo: Supongamos que hemos olvidado la definición de N y que sólo tenemos su función de distribución acumulada

$$\begin{cases} 0 & (n < 0) \\ 0'561 & (0 \leq n < 1) \\ 0'939 & (1 \leq n < 2) \\ 1 & (n \geq 2) \end{cases}$$



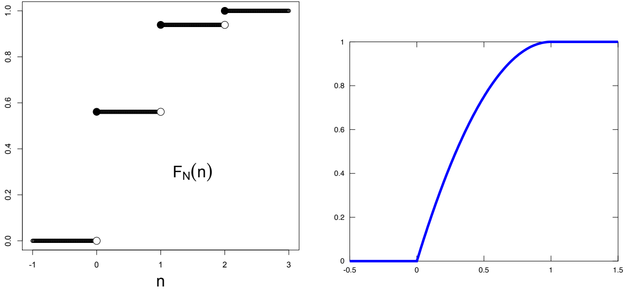
- $P[N \leq 1] = F_N(1) = 0'939$
- $P[N \geq 1] = 1 - F_N(1^-) = 1 - 0'561 = 0'439$
- $P[0 \leq N \leq 1] = F_N(1) - F_N(0^-) = 0'939 - 0 = 0'939$

Si la función de distribución no tuviese saltos (es decir, si fuese continua) podríamos prescindir de los límites: $F(x^-) = F(x)$ en todo x.

Variables aleatorias continuas y discretas

Se dice que una variable aleatoria es *continua* cuando es continua su función de distribución acumulada.

ejemplos: N no es continua. H sí es continua.



Definición equivalente: Una variable X es continua cuando para cualquier x se cumple $P[X = x] = 0$. (La función de distribución acumulada no tiene saltos.)

Variables aleatorias continuas y discretas

Si X es una variable aleatoria continua, $P[X = x] = 0$ para todo x. En particular las probabilidades de la forma $P[a \leq X \leq b]$, $P[X \leq a]$, $P[X \geq a]$ no varían al tomar desigualdades estrictas.

- $P[X \leq a] = F_X(a) = P[X < a]$
- $P[X > a] = 1 - F_X(a) = P[X \geq a]$
- $P[a < X \leq b] = F_X(b) - F_X(a)$
  $= P[a \leq X \leq b] = P[a \leq X < b] = P[a < X < b]$

Variables aleatorias continuas y discretas

Una variable aleatoria es *discreta* cuando su rango es un conjunto finito, o bien una sucesión, de valores.

Ejemplo: N es una variable discreta ya que $R_N = \{0, 1, 2\}$ es finito.

Otro ejemplo: Sea A la tirada en la que sale la primera cara al tirar sucesivamente una moneda. Entonces $R_A = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \cdots\}$ es infinito, pero es una sucesión: A es una variable discreta.

Las variables aleatorias que no son continuas ni discretas se llaman *mixtas.*

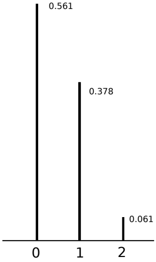
Función de probabilidad

Función de probabilidad de una variable aleatoria discreta X: es la que asocia a cada uno de los valores del rango la probabilidad de que X tome ese valor.

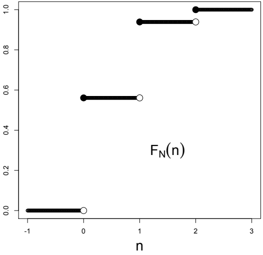
es decir: $x \in R_X \mapsto P[X = x]$

Por ejemplo, en el caso de la variable N sabíamos que $P[N = 0] = 0'561$, $P[N = 1] = 0'378$, $P[N = 2] = 0'061$.

La representación gráfica de la función de probabilidad de N es



Recoge los saltos de la función de distribución:

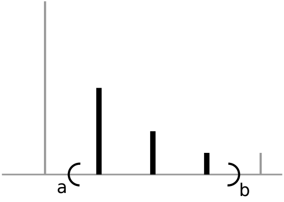


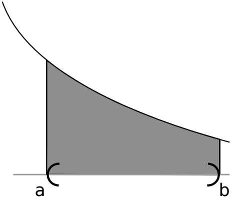
Función de densidad

La función de probabilidad de una variable aleatoria continua sería constante igual a 0, ya que $P[X = x] = 0$ para todo x en este caso.

Para variables continuas, en lugar de la función de probabilidad se define la *función de densidad.*

Las probabilidades asociadas a la variable aleatoria X se obtienen como *integrales* de la función de densidad en los intervalos correspondientes.





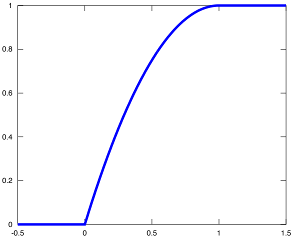
Función de densidad

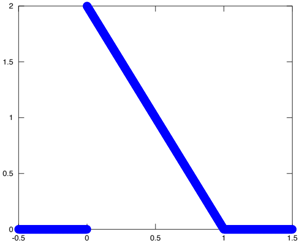
Sea X variable aleatoria **continua,** con función de distribución acumulada F_X. Se define la función de densidad de X, f_X, como la función derivada de F_X :

$f_X(x) = F'_X(x)$ en los puntos donde la derivada exista.

Por ejemplo, en el caso de H:

$$F_H(h) = \begin{cases} 0 & (h < 0) \\ 2h - h^2 & (0 \leq h < 1) \\ 1 & (h \geq 1) \end{cases} \qquad f_H(h) = \begin{cases} 0 & (h < 0) \\ 2 - 2h & (0 < h < 1) \\ 0 & (h > 1) \end{cases}$$





Función de densidad

La función de densidad puede no estar definida en un conjunto finito de puntos; eso no representa un problema porque en la práctica nos van a interesar no los valores que toma sino sus integrales.

Es decir: para que una variable aleatoria tenga función de densidad, su función de distribución acumulada tiene que poder derivarse en todos los puntos salvo quizás un número finito de ellos.

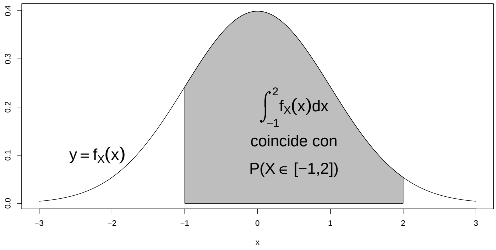
Sólo nos interesan las variables aleatorias continuas que tienen función de densidad.

Función de densidad

La función de densidad de una variable aleatoria X también almacena toda la información de esa variable, es decir, a partir de f_X se pueden calcular todas las probabilidades de la forma $P[X \in J]$, donde J es un subconjunto de $\mathbb{R}$ (normalmente un intervalo).

Concretamente si f_X es la función de densidad de X, entonces para cualquier intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ se cumple

$P[a \leq X \leq b] = \int_a^b f_X(x)\, dx$



Función de densidad

$P[X \in J] = \int_J f_X(x)\, dx$

Cuando una variable aleatoria tiene asociada una función de densidad, las probabilidades asociadas a esa variable pueden ponerse como integrales de esa función. Estas integrales son en general impropias (ni el intervalo de integración ni la propia función tienen por qué estar acotados).

Diremos que "conocemos la distribución de la variable X" cuando conozcamos su función de distribución acumulada, o bien su función de densidad.

Función de densidad

Si X es una variable aleatoria continua con función de densidad $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, entonces f_X cumple las siguientes propiedades:

1. $f_X(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx = 1$

Función de densidad

Si X es una variable aleatoria continua con función de densidad $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, entonces f_X cumple las siguientes propiedades:

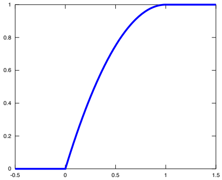
1. $f_X(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (Ya que f_X es la función derivada de la función creciente F_X).
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx = 1$ (Ya que $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx = P[-\infty < X < \infty] = 1$)

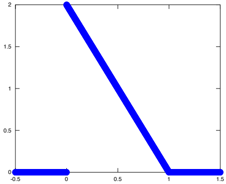
Y recíprocamente: toda función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumpla estas dos condiciones es la función de densidad de alguna variable aleatoria continua.

Función de densidad

¿Cómo obtenemos F_X a partir de f_X?

$$F_H(h) = \begin{cases} 0 & (h < 0) \\ 2h - h^2 & (0 \leq h < 1) \\ 1 & (h \geq 1) \end{cases} \qquad f_H(h) = \begin{cases} 0 & (h < 0) \\ 2 - 2h & (0 < h < 1) \\ 0 & (h > 1) \end{cases}$$



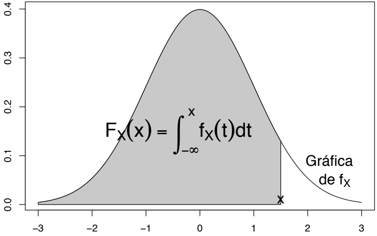


Es claro que F_X es una primitiva de f_X. Concretamente para obtener $F_X(x)$ integramos f_X desde $-\infty$ hasta x:
$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt$

Función de densidad

$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$

Ya que $F_X(x) = P[X \leq x] = P[-\infty < X \leq x] = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$

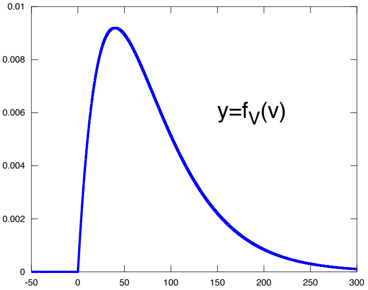


(esta integral sólo es impropia en algunos casos)

Ejemplo

Por ejemplo: consideramos la variable V (velocidad en km/h de un vehículo) con función de densidad

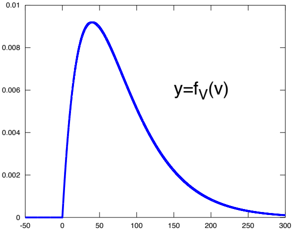
$$f_V(v) = \begin{cases} 0 & (v < 0) \\ \frac{1}{1600} v e^{-v/40} & (v > 0) \end{cases}$$



Calcular su función de distribución F_V.

Ejemplo

$$f_V(v) = \begin{cases} 0 & (v < 0) \\ \frac{1}{1600} v e^{-v/40} & (v > 0) \end{cases}$$



$$F_V(v) = \int_{-\infty}^{v} f_V(t)\, dt =$$

$$\text{si } v < 0,\ \int_{-\infty}^{v} 0\, dt = 0$$

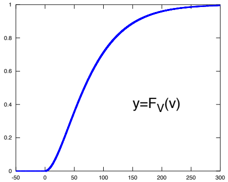
$$\text{si } v \geq 0,$$

$$\int_{-\infty}^{0} 0\, dt + \int_{0}^{v} \frac{1}{1600} t e^{-t/40}\, dt = 0 + \left(1 - e^{-v/40}\left(1 + \frac{v}{40}\right)\right)$$

Ejemplo

Conclusión: $F_V(v)$ vale lo siguiente

$$\begin{cases} 0 & (v < 0) \\ 1 - e^{-v/40}\left(1 + \frac{v}{40}\right) & (v \geq 0) \end{cases}$$



- ¿Cuál es la probabilidad de que la velocidad esté entre 100 y 150 km/h?

  Podemos calcularla como
- $F_V(150) - F_V(100) =$
  $1 - e^{-150/40}\left(1 + \frac{150}{40}\right) - \left(1 - e^{-100/40}\left(1 + \frac{100}{40}\right)\right)$ o como
- $\int_{100}^{150} f_V(v)\, dv = \int_{100}^{150} \frac{1}{1600} v e^{-v/40}\, dv$