DEFINICIÓN DE VARIABLES ALEATORIAS

1.- Variables aleatorias discretas

Rango: $R_X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, conteniendo un número finito o infinito numerable de puntos.

Función de probabilidad: $\boxed{P_X(x) = P[X = x], \quad x \in R_X}$

Propiedades fundamentales de $P_X(x)$

a) $0 \leq P_X(x) \leq 1$. Consideraremos que si $x \notin R_X \quad \Rightarrow \quad P_X(x) = 0$

b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} P_X(x_i) = 1, \quad x_i \in R_X$

Función de distribución acumulada: $\boxed{F_X(x) = P[X \leq x], \quad x \in \mathbb{R}}$

Propiedades fundamentales de $F_X(x)$

a) $0 \leq F_X(x) \leq 1$

b) $F_X(a) = 0, \quad \forall a < x_1$, siendo x_1 el valor inferior del rango.

c) $F_X(b) = 1, \quad \forall b \geq x_n$, siendo x_n el valor superior del rango.

d) $F_X(x)$ es creciente.

e) $P[c < X \leq d] = F_X(d) - F_X(c), \quad c, d \in \mathbb{R}$

Relaciones entre ambas funciones.

$P_X(x) = F_X(x) - F_X(x^-), \quad x \in R_x$

$F_X(x) = \displaystyle\sum_{\forall x_i \leq x} P_X(x_i), \quad x_i \in R_X, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2.- Variables aleatorias continuas

Rango: $R_X = [a, b]$, conteniendo un número infinito de puntos.

Función de distribución acumulada: $\boxed{F_X(x) = P[X \leq x], \quad x \in \mathbb{R}}$

Propiedades fundamentales de $F_X(x)$

a) $0 \leq F_X(x) \leq 1$

b) $F_X(x) = 0, \quad \forall x < a$, siendo a el valor inferior del rango (Notación $F_X(-\infty) = 0$)

c) $F_X(x) = 1, \quad \forall x \geq b$, siendo b el valor superior del rango (Notación $F_X(\infty) = 1$)

d) $F_X(x)$ es creciente.

e) $P[c < X \leq d] = F_X(d) - F_X(c), \quad c, d \in \mathbb{R}$

Función de densidad de probabilidad: $\boxed{f_X(x) = \dfrac{dF_X(x)}{dx}, \quad x \in R_X}$

Propiedades fundamentales de $f_X(x)$

a) $f_X(x) \geq 0$. Consideraremos que si $x \notin R_X \quad \Rightarrow \quad f_X(x) = 0$

b) $\int_a^b f_X(x)dx = 1$, siendo a y b los extremos del rango (Notación $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$)

Relaciones entre ambas funciones.

$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}, \quad x \in R_X$ (definición de $f_X(x)$)

$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)dx, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

DEFINICIÓN DE VARIABLES ALEATORIAS CONJUNTAS

1.- Variables aleatorias discretas conjuntas

Rango: $R_{X,Y} = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \times \{y_1, y_2, ..., y_m\} = R_X \times R_Y$

Función de probabilidad conjunta: $\boxed{P_{XY}(x,y) = P[X = x \cap Y = y], \quad x, y \in R_{XY}}$

Propiedades fundamentales de $P_{XY}(x,y)$

a) $0 \leq P_{XY}(x,y) \leq 1$. Consideraremos que si $x, y \notin R_{XY} \quad \Rightarrow \quad P_{XY}(x,y) = 0$

b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} P_{XY}(x_i, y_j) = 1, \quad x_i \in R_X, \quad y_j \in R_Y$

Función de distribución acumulada conjunta: $\boxed{F_{XY}(x,y) = P[X \leq x \cap Y \leq y], \quad x, y \in \mathbb{R}}$

Propiedades fundamentales de $F_{XY}(x,y)$

a) $0 \leq F_{XY}(x,y) \leq 1$

b) $F_{XY}(-\infty, y) = F_{XY}(x, -\infty) = 0; \qquad F_{XY}(\infty, \infty) = 1$

Más propiedades pueden deducirse de forma obvia a partir de la definición de la función.

Relaciones entre ambas funciones.

$$F_{XY}(x,y) = \sum_{\forall x_i \leq x} \sum_{\forall y_j \leq y} P_{XY}(x_i, y_j), \quad x_i, y_j \in R_{XY}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Funciones marginales.

$$P_X(x) = \sum_{\forall y \in R_Y} P_{XY}(x,y); \qquad P_Y(y) = \sum_{\forall x \in R_X} P_{XY}(x,y)$$

$$F_X(x) = F_{XY}(x, \infty); \qquad F_Y(y) = F_{XY}(\infty, y)$$

2.- Variables aleatorias continuas conjuntas

Rango: R_{XY}, conteniendo un número infinito de puntos.

Función de distribución acumulada conjunta: $\boxed{F_{XY}(x,y) = P[X \leq x \cap Y \leq y], \quad x, y \in \mathbb{R}}$

Propiedades fundamentales de $F_{XY}(x,y)$: las mismas que en el caso discreto.

Función de densidad de probabilidad conjunta: $\boxed{f_{XY}(x,y) = \dfrac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x \partial y}, \quad x, y \in R_{XY}}$

Propiedades fundamentales de $f_{X,Y}(x,y)$

a) $f_{X,Y}(x,y) \geq 0$. Consideraremos que si $x, y \notin R_{XY} \quad \Rightarrow \quad f_{XY}(x,y) = 0$

b) $\int \int_{R_{XY}} f_{XY}(x,y) = 1$.

Relaciones entre ambas funciones.

$f_{XY}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x \partial y}, \quad x, y \in R_{XY}$ (definición de $f_{XY}(x,y)$)

$F_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{XY}(x,y) dy dx, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

Funciones marginales.

$f_X(x) = \int_{R_Y} f_{XY}(x,y) dy; \qquad f_Y(y) = \int_{R_X} f_{XY}(x,y) dx$

$F_X(x) = F_{XY}(x, \infty); \qquad F_Y(y) = F_{XY}(\infty, y)$