CPE (SEGUNDO CURSO)

PRÁCTICA 13 **SOLUCIONES** (**Curso 2023–2024**)

1.– La función

$$f_X(x) = \frac{(a+1)x^a}{\theta^{a+1}}, \quad 0 \le x \le \theta, \quad \theta > 0, \quad a > 0$$

es una función de densidad para cualesquiera valores de θ y a con las restricciones especificadas. Dada una muestra aleatoria de tamaño n de X y suponiendo $\theta =$ cte. deducir estimadores puntuales de a mediante todos los métodos que se conozcan.

Repítase el ejercicio suponiendo $a =$ cte. y encontrando estimadores puntuales de θ

————————SOLUCIÓN————————

1.- Estimadores de a

Calcularemos primero el estimador mediante el método de los momentos. La esperanza matemática de la variable es

$$E[X] = \int_0^\theta x \frac{(a+1)x^a}{\theta^{a+1}} dx = \frac{(a+1)}{\theta^{a+1}} \int_0^\theta x^{a+1} dx = \frac{a+1}{\theta^{a+1}} \frac{x^{a+2}}{a+2}\bigg|_0^\theta = \frac{\theta(a+1)}{a+2}$$

El estimador puntual que proporciona este método es el que proporciona la ecuación $\bar{x} = E[X]$. Por tanto

$$\bar{x} = \frac{\theta(\hat{a}+1)}{\hat{a}+2} \qquad \Longrightarrow \qquad \hat{a} = \frac{\theta - 2\bar{x}}{\bar{x} - \theta}$$

Si utilizamos ahora el método de máxima verosimilitud, debemos crear primero la función de verosimilitud

$$L = \prod_{i=1}^n f_X(x_i) = \prod_{i=1}^n \frac{(a+1)x_i^a}{\theta^{a+1}} = \frac{(a+1)^n}{\theta^{n(a+1)}} \prod_{i=1}^n x_i^a$$

Tomando logaritmos

$$\ln L = n\ln(a+1) - n(a+1)\ln\theta + \sum_{i=1}^n a \ln x_i$$

Derivando con respecto a a

$$\frac{\partial \ln L}{\partial a} = \frac{n}{a+1} - n\ln\theta + \sum_{i=1}^n \ln x_i$$

E igualando a cero

$$\frac{n}{\hat{a}+1} - n\ln\theta + \sum_{i=1}^n \ln x_i = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \hat{a} = \frac{n}{n\ln\theta - \sum_{i=1}^n \ln x_i} - 1$$

2.- Estimadores de θ

Utilizando el método de los momentos,

$$\bar{x} = \frac{\hat{\theta}(a+1)}{a+2} \qquad \Longrightarrow \qquad \hat{\theta} = \frac{\bar{x}(a+2)}{a+1}$$

Si utilizamos ahora el método de máxima verosimilitud, debemos crear primero la función de verosimilitud. Al igual que antes

$$L = \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{(a+1)x_i^a}{\theta^{a+1}} = \frac{(a+1)^n}{\theta^{n(a+1)}} \prod_{i=1}^{n} x_i^a$$

Tomando logaritmos

$$\ln L = n\ln(a+1) - n(a+1)\ln\theta + \sum_{i=1}^{n} a\ln x_i$$

Derivando con respecto a θ

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \frac{-n(a+1)}{\theta}$$

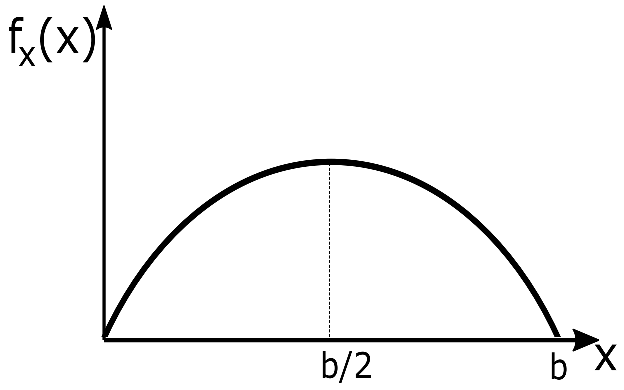
y el problema no puede resolverse igualando a cero la derivada.

Si observamos la función de verosimilitud (que ha de maximizarse), es claro que esa función tendrá un máximo para el valor más pequeño de $\theta^{n(a+1)}$. Como $n > 1$ y $a > 0$ eso es lo mismo que decir para el valor más pequeño de θ. Pero θ es el extremo superior del rango de X. Luego si algún valor de la muestra estuviera fuera del rango, la correspondiente función de densidad sería nula y por consiguiente también lo sería la función de verosimilitud. Luego el valor de θ que hace máxima L es

$$\hat{\theta} = max\{x_i\}$$

.

2.– Se sabe que la variable aleatoria X tiene la distribución de la figura (parábola).



Se pide:

a) Determinar la función de densidad y la función de distribución acumulada de X.

b) Dada una muestra de tamaño n determinar un estimador de b por el método de los momentos.

c) Estudiar, en lo posible, el sesgo y la consistencia del estimador.

SOLUCIÓN

Primero determinaremos el rango, función de densidad y función de distribución acumulada de X. El rango de X es $R_X = [0, b]$, la función de densidad es una parábola de la forma: $f_X(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

La función de densidad debe verificar que pasa por los puntos $(0,0)$ y $(b,0)$. Además de verificarse que $\int_0^b f_X(x)dx = 1$

Al imponer las restricciones obtenemos $f_X(0) = a_0 = 0$, $f_X(b) = a_2 b^2 + a_1 b = 0$, $\int_0^b f_X(x)dx = \frac{a_2}{3}b^3 + \frac{a_1}{2}b^2 = 1$.

Por tanto:

$$f_X(x) = \frac{-6}{b^3}x^2 + \frac{6}{b^2}x$$

$$F_X(x) = \int_0^x f_X(x)dx = \frac{-6}{3b^3}x^3 + \frac{6}{2b^2}x^2 = \frac{-2}{b^3}x^3 + \frac{3}{b^2}x^2$$

.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{-2}{b^3}x^3 + \frac{3}{b^2}x^2 & 0 \leq x \leq b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$

b) Dada la simetría en la función de densidad es directo determinar que

$$E[X] = b/2$$

Por tanto, un estimador de b obtenido por el método de los momentos será $\hat{b} = 2\bar{x}$

c)Primero analizaremos el sesgo

$$Sesgo = E[\hat{b}] - b$$

$$E[\hat{b}] = E[2\bar{x}] = 2E\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n}\right] = \frac{2}{n}E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left[X_i\right] =$$
$$= \frac{2}{n}\frac{n\ b}{2} = b$$

$$Sesgo = E[\hat{b}] - b = 0$$

Por tanto el estimador es insesgado.

Para la analizar la consistencia calculamos primero la varianza

$$Var[\hat{b}] = Var[2\bar{x}] = 4\ Var\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n}\right] = \frac{4}{n^2}Var\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var\left[X_i\right] =$$
$$= \frac{4}{n^2}n\ \sigma_x^2 = \frac{4}{n}\sigma_x^2$$

$\lim_{n \to \infty} Var[\hat{b}] = 0$ y el estimador es consistente.

3.– Una compañía especializada en transportes pesados realiza la siguiente oferta a una empresa de construcción de álabes de aerogeneradores que necesita enviar su mercancía a un determinado puerto de mar para embarcarlas. El tiempo de viaje hasta el puerto se pacta en una cifra T_0. Si el camión tarda T_0 el precio acordado es fijo. Ese precio cubre los gastos del transporte, por lo que teóricamente, la empresa de transporte no obtendría ningún beneficio. Llamemos $X = T - T_0$, el tiempo de retraso ($X \geq 0$) o de adelanto ($X < 0$) del camión. Si el camión se retrasa, la empresa de transporte pagaría una multa de $40X^2$. Si por el contrario, el camión se adelanta, la empresa obtendría un pago adicional de $-10X^3$. La empresa sabe que este tiempo X de retraso o adelanto es aleatorio con la siguiente distribución:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{-xe^{-(x/t)^2}}{t^2} & x \leq 0 \\ \dfrac{xe^{-(x/t)^2}}{t^2} & x > 0 \end{cases}$$

Por encargos anteriores, la empresa de transporte tiene una muestra de 12 encargos similares, de donde obtuvo la siguiente muestra, considerada aleatoria, de la variable X : 11.3, −3.5, −4.5, −7.2, 3.7, 3.5, −2.3, −0.87, 2.2, 2.5, −5.3, −4.1

Se pide:

a) Determinar un estimador del parámetro t mediante el método de máxima verosimilitud.

b) En el caso de que la fábrica aceptase la oferta, ¿es ésta beneficiosa para la empresa de transporte? Justificar la respuesta.

Nota 1: $n = 12$, $\sum x_i = -4.57$, $\sum x_i^2 = 300$

Nota 2: $\displaystyle\int_0^\infty x^2 e^{-(x/t)^2} dx = \frac{t^3\sqrt{\pi}}{4}$, $\displaystyle\int_0^\infty x^3 e^{-(x/t)^2} dx = \frac{t^4}{2}$, $\displaystyle\int_0^\infty x^4 e^{-(x/t)^2} dx = \frac{3t^5\sqrt{\pi}}{8}$

———————SOLUCIÓN———————

Lo primero que habrá que obtener es un estimador del parámetro t de la distribución. No podemos utilizar el método de los momentos porque la esperanza matemática de X es cero (obvio por simetría de la función). Utilizaremos pues el método de máxima verosimilitud. La función de verosimilitud es

$$L = \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{|x_i| e^{-(x_i/t)^2}}{t^2} = t^{-2n} \prod_{i=1}^{n} \left[|x_i| e^{-(x_i/t)^2} \right]$$

Tomando logaritmos

$$\ln L = -2n\ln(t) + \sum_{i=1}^{n} \ln\left[|x_i| e^{-(x_i/t)^2}\right] = -2n\ln(t) + \sum_{i=1}^{n} \ln|x_i| - \sum_{i=1}^{n} \left[-(x_i/t)^2 \right]$$

Derivando con respecto a t

$$\frac{d\ln L}{t} = -\frac{2n}{t} + \frac{2\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{t^3}$$

Igualando a cero

$$\frac{2n}{\hat{t}} = \frac{2\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{\hat{t}^3}$$

Luego

$$\hat{t} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}}$$

Con los datos que tenemos, $\hat{t} = 5$

Calculemos la esperanza matemática de los beneficios

$$E[B] = E[-10X^3|X \leq 0] = \int_{-\infty}^{0} \frac{10x^4}{5^2} e^{-(\frac{x}{5})^2} dx = \int_{0}^{\infty} \frac{10x^4}{5^2} e^{-(\frac{x}{5})^2} dx = \frac{30 \times 5^3\sqrt{\pi}}{8} = 830.84$$

La esperanza matemática de la multa es, por otro lado

$$E[M] = E[40X^2|X > 0] = \int_{0}^{\infty} \frac{40x^3}{5^2} e^{-(\frac{x}{5})^2} dx = \frac{40}{5^2}\frac{5^4}{2} = 500$$

Luego el trato es beneficioso en media para la empresa, ya que $E[B] > E[M]$

4.– De una población aleatoria X, con función de densidad

$$f_X(x) = \theta^2 x e^{-x\theta}, \quad x \geq 0, \quad \theta > 0$$

se toma una muestra de tamaño 1, x_1.

Determinar el estimador de máxima verosimilitud de θ. Estudiar su sesgo.

——————SOLUCIÓN——————

a) Al tomar una muestra de tamaño 1, la función de verosimilitud es

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_{x_i}(x_i) = \theta^2 x_1 e^{-\theta x_1}$$

Tomando logaritmos

$$\ln L(\theta) = 2\ln\theta + \ln x_1 - \theta x_1$$

Derivando con respecto a θ para hallar el máximo de $L(\theta)$ obtenemos

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial\theta} = \frac{2}{\hat{\theta}} - x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\hat{\theta} = \frac{2}{x_1}}$$

Veamos el sesgo de este estimador

$$E[\hat{\theta}] = E[\frac{2}{X_1}] = E[\frac{2}{X}] = \int_0^{\infty} \frac{2}{x} f_X(x)dx = \int_0^{\infty} \frac{2}{x}\theta^2 x e^{-x\theta} dx = 2\theta^2 \int_0^{\infty} e^{-x\theta} dx = 2\theta$$

que es claramente sesgado.

5.– Considérese el porcentaje del tiempo total permitido que utiliza un estudiante para realizar un determinado examen. Sea X este porcentaje aleatorio. Supóngase que este porcentaje se distribuye estadísticamente (en tanto por uno) según la función de densidad

$$f_X(x) = (\theta + 1)x^{\theta}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \theta > -1$$

Se toma una muestra de 10 estudiantes con el siguiente resultado:

0.92, 0.79, 0.90, 0.65, 0.86, 0.47, 0.73, 0.97, 0.94 y 0.77.

1.- Calcular un estimador de θ por el método de los momentos.

2.- Calcular el estimador de máxima verosimilitud de θ.

————————SOLUCIÓN————————

1.- Si utilizamos el método de los momentos podemos usar, por ejemplo, la media muestral para estimar la media de la población. La esperanza matemática de X es

$$E[X] = \int_0^1 x f_X(x)dx = \int_0^1 (\theta+1)x^{(\theta+1)}dx = \frac{\theta+1}{\theta+2}$$

Por lo tanto

$$\hat{m} = \overline{x} = \frac{\hat{\theta}+1}{\hat{\theta}+2} \implies \hat{\theta} = \frac{1-2\overline{x}}{\overline{x}-1}$$

En nuestro caso $\overline{x} = 0.8$ luego $\boxed{\hat{\theta} = 3}$.

2.- Para obtener el estimador de máxima verosimilitud hay que calcular la función de verosimilitud, $L(\theta|x_1, x_2, ...x_n)$.

$$L(\theta|x_1, x_2, ...x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i) = \prod_{i=1}^{n} (\theta+1){x_i}^{\theta} = (\theta+1)^n \Big(\prod_{i=1}^{n} x_i\Big)^{\theta}$$

Derivando con respecto a θ para hallar el máximo

$$\frac{\partial L(\theta|x_1, x_2, ...x_n)}{\partial \theta} = n(\theta+1)^{(n-1)}\Big(\prod_{i=1}^{n} x_i\Big)^{\theta} + (\theta+1)^n\Big(\prod_{i=1}^{n} x_i\Big)^{\theta} \ln\Big[\prod_{i=1}^{n} x_i\Big]$$

Igualando a cero y dividiendo por términos no nulos (en probabilidad)

$$n(\hat{\theta}+1)^{(n-1)} + (\hat{\theta}+1)^n \ln\Big[\prod_{i=1}^{n} x_i\Big] = n(\hat{\theta}+1)^{(n-1)} + (\hat{\theta}+1)^n \sum_{i=1}^{n} \ln x_i = 0$$

Dado que $\theta > -1$ podemos simplificar para obtener

$$\hat{\theta} + 1 = \frac{-n}{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}; \quad \boxed{\hat{\theta} = -1 - \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}}$$

Y en nuestro caso se obtendría $\boxed{\hat{\theta} = 3.11606}$