CPE (SEGUNDO CURSO)

PRÁCTICA 11 **SOLUCIONES** (**Curso 2024–2025**)

1.– El Ministerio de Transportes, Movilidad y Agenda Urbana está considerando establecer límites más estrictos para la contaminación acústica en las zonas residenciales próximas a la nueva pista del aeropuerto de Adolfo Suárez Madrid-Barajas en Madrid. Actualmente la contaminación acústica en el despegue de un reactor puede considerarse normalmente distribuida, con media 100 decibelios y desviación típica 6 decibelios.

a) Si la nueva normativa del Ministerio establece que la contaminación acústica ha de ser inferior a 105 decibelios en el 95 % de los despegues, ¿hasta donde se tendrá que reducir el nivel medio de ruido al despegue?

b) Supóngase que se consigue reducir el nivel medio de ruido a la cantidad calculada en el apartado a). Si el número de reactores que despegan diariamente puede representarse como una variable de Poisson de media 200, ¿cuántos de estos reactores sobrepasarán diariamente los 105 decibelios?

——————SOLUCIÓN——————

a) Sea R el nivel de contaminación acústica. Sabemos que $R \equiv N(m = 100, \sigma = 6)$. Queremos reducir la media m de forma que $P[R \leq 105] = 0.95$. Si suponemos que al reducir la media no cambia ni la desviación típica ni la distribución de R,

$$P[R \leq 105] = F_R(105) = F_U[\frac{105 - m}{6}]$$

De las tablas

$$\frac{105 - m}{6} = 1.645 \quad \Longrightarrow \quad m = 95.13 \text{ dB}$$

b) Ahora $R \equiv N(95.13, 6^2)$ Sea N el número de aviones que despegan en un día. Sabemos que $N \equiv P(200)$. La probabilidad de que un reactor sobrepase los 105 decibelios es, evidentemente, 0.05. Luego si M es el número de reactores que sobrepasan los 105 dB, $M \equiv B(N, 0.05)$, donde N es aleatorio. Entonces

$$P[M = m|N = n] = \binom{n}{m} 0.05^m 0.95^{n-m}$$

$$P[M = m \cap N = n] = \binom{n}{m} 0.05^m 0.95^{n-m} \frac{200^n e^{-200}}{n!}$$

$$P[M = m] = \sum_{n=m}^{\infty} \binom{n}{m} 0.05^m 0.95^{n-m} \frac{200^n e^{-200}}{n!} = \frac{e^{-200} 0.05^m}{m!} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{0.95^{n-m} 200^n}{(n-m)!}$$

Si en el sumatorio hacemos el cambio $i = n - m$ resulta

$$P[M = m] = \frac{e^{-200} 0.05^m}{m!} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{0.95^i 200^{i+m}}{i!} = \frac{e^{-200} 0.05^m 200^m}{m!} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{190^i}{i!} =$$

$$= \frac{e^{-200} 0.05^m 200^m}{m!} e^{190} = \frac{10^m e^{-10}}{m!}$$

luego M también es Poisson con parámetro 10.

2.– Uno de los parámetros que ha de describirse en el proyecto del dique de abrigo de Punta Langosteira para el futuro puerto exterior es la velocidad del viento durante temporales de componente norte. Supóngase que la ocurrencia de estos temporales puede considerarse Poisson, con media ν temporales al año. La velocidad X del viento en m/s durante uno de estos temporales es exponencial, pero trasladada un valor $a > 0$, de forma que $x \geq a$, y con media $1.2a$ m/s. Si la vida de proyecto del dique es de 150 años, calcúlese la función de distribución acumulada de la velocidad máxima del viento que tendrá que soportar la zona durante dicho periodo. Particularizar para $\nu = 6$ y $a = 15$ m/s.¿Qué velocidad del viento habrá de utilizarse como velocidad de diseño para que la probabilidad de que sea excedida en la vida útil del dique sea del 5 %?

SOLUCIÓN

La distribución de X es $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda(x-a)}$, $x \geq a$. Como la media de esta variable es $E[X] = 1.2a$

$$1.2a = \int_a^\infty x\lambda e^{-\lambda(x-a)}dx = \frac{1}{\lambda} + a \implies \lambda = \frac{5}{a}$$

Si al año hay M temporales, con $M \equiv P(\nu)$, y consideramos que cada año es independiente de los demás, en 150 años habrá N temporales, con $N \equiv P(150\nu)$.

Supongamos $N = n$, y sea X_i la velocidad del viento durante el temporal i. Si llamamos Y a la velocidad máxima del viento durante esos n temporales, $Y = max\{X_i\}$. Por lo tanto

$$F_{Y|N=n}(y,n) = \Big[F_X(y)\Big]^n$$

como tantas veces se ha visto.

Además $F_X(y) = 1 - e^{-\lambda(y-a)} = 1 - e^{-\frac{5}{a}(y-a)}$ y $P_N(n) = \frac{(150\nu)^n e^{-150\nu}}{n!}$ y, consecuentemente

$$F_Y(y) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{Y|N=n}(y,n)P_N(n) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big[F_X(y)\Big]^n \frac{(150\nu)^n e^{-150\nu}}{n!} = e^{-150\nu}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\big[150\nu F_X(y)\big]^n}{n!} =$$

$$= e^{-150\nu}e^{\big[150\nu F_X(y)\big]} = e^{-150\nu}e^{\big[150\nu(1-e^{-\frac{5}{a}(y-a)})\big]} = e^{-150\nu e^{-\frac{5}{a}(y-a)}}$$

El rango de Y es obviamente $y \geq a$. Obsérvese que en la expresión anterior

$$P[Y \leq a] = F_Y(a) = e^{-150\nu} \neq 0$$

Este valor representa la probabilidad de que no haya ningún temporal en la zona en los 150 años de vida útil. Obviamente para los datos que tenemos este valor es muy pequeño, pero eso no impide que la variable aleatoria Y sea una variable mixta, ya que

$$P[Y = a] = P[N = 0] = e^{-150\nu} \neq 0$$

Particularizando para los valores dados

$$F_Y(15) = e^{-900}, \quad F_Y(y) = e^{-900e^{-\frac{1}{3}(y-15)}}, \ y > 15$$

El viento de diseño, y_d, se calculará de forma que $P[Y \leq y_d] = F_Y(y_d) = 0.95$. Por tanto

$$e^{-900e^{-\frac{1}{3}(y_d-15)}} = 0.95 \implies y_d = 44.318 \ m/s$$

que viene representando unos 160 Km/h.

3.– Un fenómeno natural (por ejemplo, avenidas de un río) se produce en el tiempo siguiendo una distribución de Poisson de media ν (sucesos/año). Cada uno de los sucesos alcanza un nivel aleatorio, X, $\;X \geq 0$ (por ejemplo, caudal del río) que se supone distribuido exponencialmente con parámetro λ.

a) Hallar la distribución del máximo nivel, Y, que se alcanza en m años.

b) Identificar la distribución del máximo nivel, Y, con alguna distribución conocida y expresar sus parámetros en función de ν, λ y m. Prescíndase de que $X \geq 0$ en este apartado.

c) ¿Cuánto vale la probabilidad de que $Y = 0$?

Nota: Se recuerda que $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$

——————————SOLUCIÓN——————————

a) Sea Y el nivel máximo alcanzado en m años. Sea N el número de veces que el suceso ha ocurrido durante esos m años. N sigue una distribución de Poisson de media $m\nu$, y por el Teorema de la Probabilidad Total, para todo $y \geq 0$

$$P[Y \leq y] = \sum_{n=0}^{\infty} P[Y \leq y|N = n]\; P[N = n]$$

Calculemos la distribución de la variable condicionada $Y|N = n$. Supuesto que ha sucedido n veces el fenómeno, el hecho de que el máximo nivel alcanzado sea menor o igual que y es la intersección de los sucesos consistentes en que cada una de las n veces el nivel haya sido menor o igual que y; asumiendo que los niveles alcanzados en distintas ocurrencias del fenómeno son independientes, y teniendo en cuenta que estos niveles siguen la misma distribución (exponencial de parámetro λ), se deduce $P[Y \leq y|N = n] = P[X \leq y]^n$ siendo X una exponencial de parámetro λ, es decir,

$$P[Y \leq y|N = n] = (1 - e^{-\lambda y})^n$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} P[Y \leq y] &= \sum_{n=0}^{\infty}(1 - e^{-\lambda y})^n e^{-m\nu} \frac{(m\nu)^n}{n!} = e^{-m\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(m\nu(1 - e^{-\lambda y}))^n}{n!} \\ &= e^{-m\nu} e^{m\nu(1-e^{-\lambda y})} = e^{-m\nu e^{-\lambda y}}, \quad y \geq 0 \end{aligned}$$

La determinación completa de la distribución de Y es

$$F_Y(y) = P[Y \leq y] = \begin{cases} e^{-m\nu e^{-\lambda y}} & \text{si } y \geq 0 \\ 0 & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

b) El rango de Y es $[0, \infty[$. Si, como se nos dice, consideramos una variable aleatoria con rango $]-\infty, \infty[$ y cuya función de distribución venga dada por la misma expresión $F(y) = e^{-m\nu e^{-\lambda y}}$ para todos los valores reales de y (tiene sentido ya que esta función tiende a 0 cuando $y \to -\infty$), obtenemos una variable de Gumbel. Recordemos que la expresión de la función de distribución de una tal variable es

$$F_Y(y) = e^{-e^{-\alpha(y-u)}}$$

donde α y u son los parámetros que tenemos que determinar en este caso. Transformando la expresión obtenida arriba

$$F_y(y) = e^{-m\nu e^{-\lambda y}} = e^{-e^{\ln(m\nu)}e^{-\lambda y}} = e^{-e^{\ln(m\nu)-\lambda y}} = e^{-e^{-\lambda(y-\frac{\ln(m\nu)}{\lambda})}}$$

de forma que en este caso $\alpha = \lambda$, $u = \frac{\ln(m\nu)}{\lambda}$.

c) $P[Y = 0]$ es el salto de la función de distribución de Y en $y = 0$, es decir, la distancia entre los dos límites laterales de F_Y en ese punto.

$$F_Y(0^-) = 0, \quad F_Y(0^+) = F_Y(0) = e^{-m\nu e^{-\lambda\cdot 0}} = e^{-m\nu} \Rightarrow P[Y = 0] = e^{-m\nu}.$$

Notar que este valor coincide con el de la probabilidad de que se produzcan 0 llegadas en una Poisson de media $m\nu$: si el nivel máximo obtenido es cero podemos suponer (en términos de probabilidad) que el fenómeno no ha llegado a producirse ni una sola vez.

4.– Un fenómeno natural ocurre siguiendo un proceso de Poisson de parámetro ν (sucesos por año). Cada suceso del fenómeno se caracteriza por una intensidad X que se supone distribuida exponencialmente con parámetro λ.

a) Hallar la distribución acumulada del máximo anual, Y, de las intensidades X_i asociadas a los sucesos de Poisson ocurridos durante un año. ¿Qué tipo de variable aleatoria es Y?

b) Por otra parte, el mismo máximo anual, Y, ha sido modelado por una distribución de Gumbel con parámetros $\alpha = \lambda$ y $u = (\log \nu)/\lambda$. Determinar las diferencias entre la distribución hallada en *a)* y la dada. ¿Qué diferencia se encontraría al hallar el periodo de retorno de máximos anuales para intensidades Y que superen el valor $y_o > 0$?

——————SOLUCIÓN——————

(a) Sea N la variable aleatoria "número de sucesos del fenómeno en un año". Según el enunciado N sigue una distribución de Poisson de parámetro ν, es decir,

$$P[N = n] = e^{-\nu}\frac{\nu^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Para cada $y \geq 0$ (es claro que el rango de esta variable ha de ser la semirrecta positiva) se tiene, por el teorema de la probabilidad total,

$$F_Y(y) = P[Y \leq y] = \sum_{n=0}^{\infty} P[Y \leq y|N = n]P[N = n];$$

de esta forma hacemos intervenir la probabilidad de que el máximo anual no supere el valor y *condicionada* a que ha habido n ocurrencias del fenómeno. Con esa información ya podemos evaluar fácilmente

$$P[Y \leq y|N = n] = P[X_1 \leq y,\, X_2 \leq y, \ldots, X_n \leq y]$$

siendo X_i cada una de las intensidades registradas, ya que Y es el máximo de todas ellas. Aceptando que las intensidades son independientes, y teniendo en cuenta que todas están igualmente distribuidas,

$$P[Y \leq y|N = n] = P[X_1 \leq y]P[X_2 \leq y]\ldots P[X_n \leq y] = P[X \leq y]^n = F_X(y)^n$$

siendo X una exponencial de parámetro λ, según nos dice el enunciado. La función de distribución acumulada de X es $F_X(y) = 1 - e^{-\lambda y}$ para valores positivos de y (como es el caso). La expresión de F_Y queda como sigue:

$$F_Y(y) = \sum_{n=0}^{\infty}(1 - e^{-\lambda y})^n e^{-\nu}\frac{\nu^n}{n!} = e^{-\nu}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[\nu(1 - e^{-\lambda y})]^n}{n!} = e^{-\nu}e^{\nu(1-e^{-\lambda y})} = e^{-\nu e^{-\lambda y}}, y \geq 0$$

Para $y < 0$ es claro que $P[Y \leq y] = 0$ y así

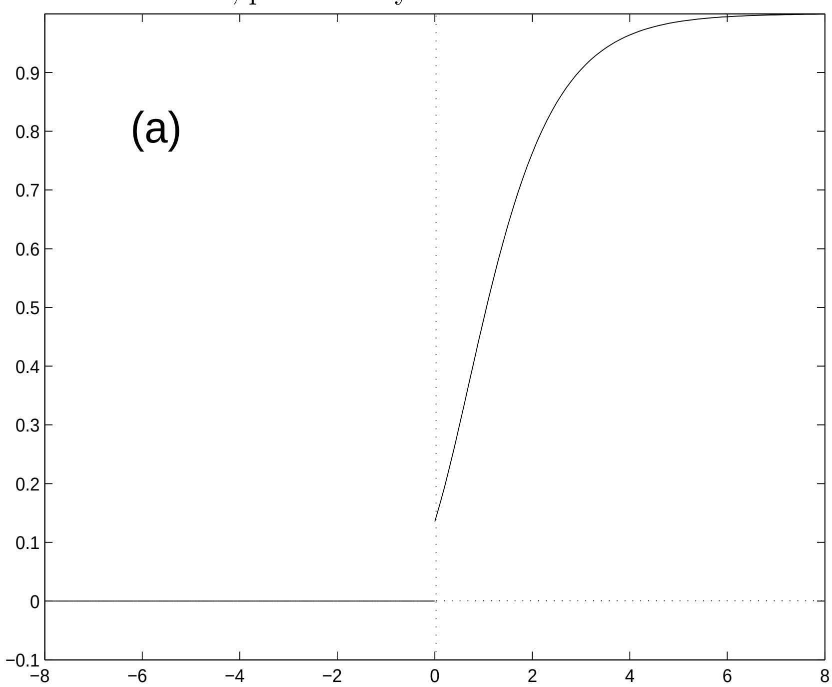
$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ e^{-\nu e^{-\lambda y}} & \text{si } y \geq 0 \end{cases}$$

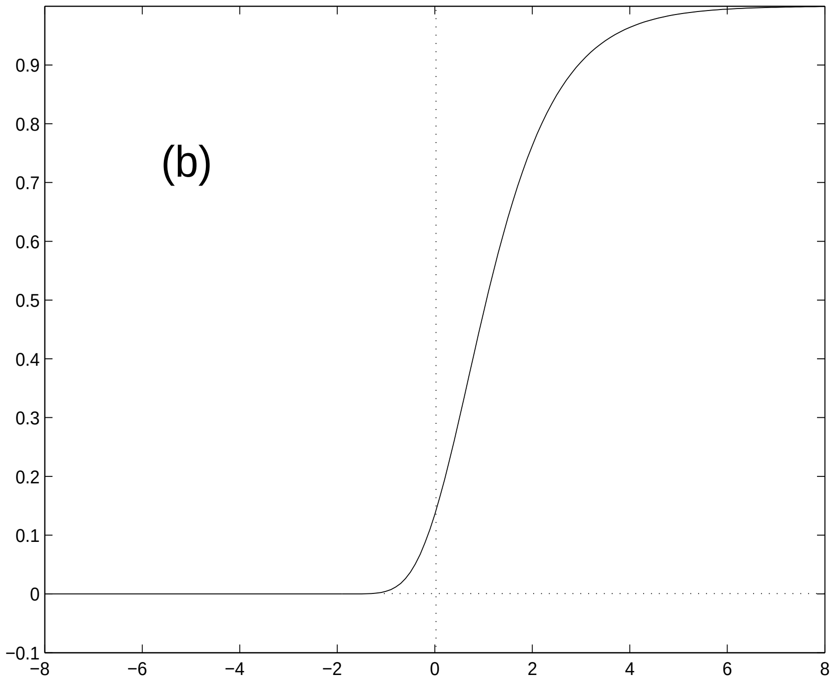
Obsérvese que para $y = 0 \Rightarrow F_Y(0) = e^{-\nu}$, mientras que para $y = -\epsilon,\ \epsilon > 0, \Rightarrow F_Y(y) = 0$. Por lo tanto, en el punto $y = 0$ hay una discontinuidad (como puede observarse en la figura del próximo apartado). Efectivamente $P[Y = 0] = e^{-\nu} \neq 0$, que es la probabilidad de que el número de fenómenos naturales en un año sea $N = 0$. Por lo tanto, la variable Y es una variable de tipo mixto.

(b) La función de distribución de una variable de Gumbel de parámetros α y u es de la forma $F_Y(y) = e^{-e^{-\alpha(y-u)}},\ y \in \mathbb{R}$. Introduciendo los valores $\alpha = \lambda$ y $u = (\log \nu)/\lambda$ obtenemos

$$F_Y(y) = e^{-e^{-\lambda(y-(\log \nu)/\lambda)}} = e^{-e^{-\lambda y}e^{\log \nu}} = e^{-\nu e^{-\lambda y}}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Llegamos a la misma expresión que en el apartado (a), pero para todos los valores reales de y en vez de sólo para los positivos. A continuación incluimos las gráficas de las dos funciones de distribución, para $\nu = 2$ y $\lambda = 1$:





Recordemos que el período de retorno para intensidades que superen el valor $y_0 > 0$ es un número de años R tal que

$$P[Y \geq y_0] = \frac{1}{R} \quad \text{o bien} \quad R = \frac{1}{P[Y \geq y_0]}$$

Dado que $P[Y \geq y_0] = 1 - F_Y(y_0)$ y las dos funciones de distribución acumulada coinciden para valores positivos de la variable, los períodos de retorno que proporcionan los dos modelos son iguales.

5.– El radio de un círculo es una variable aleatoria con distribución N(0,1) truncada en $X = 0$, es decir, con $X \geq 0$. Supongamos que A es el área del círculo, Calcular:

a) La función de densidad de A

b) El coeficiente de correlación entre X y A

SOLUCIÓN

(a) Nos piden determinar la función de densidad del área del circulo $A = \pi X^2$, para ello se calcula previamente $f_X(x)$. Sea Y una variable aleatoria con distribución $N(0,1)$ cuyo rango es $R_Y = (-\infty, \infty)$, queremos hallar la distribución de $X = Y \setminus 0 \leq x < \infty$. Por tanto:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{f_Y(x)}{F(\infty)-F(0)} = 2f_Y(x) & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Introduciendo la expresión de $f_Y(x)$ resulta:

$$f_X(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-x^2/2} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Como la relación entre A y X es monótona creciente, podemos escribir

$$f_A(a) = \frac{dx}{da} f_X(x)\bigg|_{x=\sqrt{\frac{a}{\pi}}} = \begin{cases} \frac{e^{-a/(2\pi)}}{\pi\sqrt{2a}}, & a > 0 \\ 0 & a < 0 \end{cases}$$

Se comprueba que esta función es una función de densidad adecuada:

$$\int_{R_A} f_A(a)da = \int_0^{\infty} \frac{e^{-a/(2\pi)}}{\pi\sqrt{2a}} da = 1$$

(b) Nos piden el valor del coeficiente de correlación ρ_{XA} que viene dado por la siguiente expresión:

$$\rho_{XA} = \frac{\sigma_{XA}}{\sigma_X \sigma_A}$$

donde a su vez la covarianza y las varianzas para calcular las desviaciones típicas se pueden obtener como:

$$\sigma_{XA} = E[XA] - E[X]E[A],\ E[XA] = E[\pi X^3] = \pi E\left[X^3\right],\ E[A] = E[\pi X^2] = \pi E\left[X^2\right]$$

$$\sigma_X^2 = E\left[X^2\right] - (E[X])^2$$

$$\sigma_A^2 = Var\left[\pi X^2\right] = \pi^2 Var\left[X^2\right]$$

Por tanto, necesitamos calcular todos los momentos absolutos de X hasta orden 3:

$$E[X] = \int_0^{\infty} x\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-x^2/2} dx = \left[-\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-x^2/2}\right]_0^{\infty} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

Para obtener $E\left[X^2\right]$ se integra por partes considerando $u = x$ y $dv = x\sqrt{2/\pi}e^{-x^2/2}dx$, luego:

$$E\left[X^2\right] = \int_0^{\infty} x^2\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-x^2/2} dx{=}1$$

$E\left[X^3\right]$ se calcula integrando por partes nuevamente con $u = x^2$ y $dv = x\sqrt{2/\pi}e^{-x^2/2}dx$:

$$E\left[X^3\right] = \int_0^{\infty} x^3\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-x^2/2} dx{=} \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(e^{-x^2/2}\right)\left(x^2+2\right)\right]_0^{\infty} = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

Luego, el coeficiente de correlación es:

$$\rho_{XA} = \frac{2\sqrt{2\pi} - \sqrt{2\pi}}{\sqrt{1-2/\pi} \cdot \pi\sqrt{1-2/\pi}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\pi - 2}$$