CPE (SEGUNDO CURSO)

PRÁCTICA 10 **SOLUCIONES** (**Curso 2024–2025**)

1.– En una instalación fotovoltaica, se han instalado 210 paneles solares. La vida útil de cada panel puede considerarse normalmente distribuida con media $m = 20$ años y $\sigma = 1.2$ años. Calcular la probabilidad de que en la instalación, por lo menos 20 paneles duren menos de 18.5 años.

Con el fin de reducir la probabilidad de fallo, se desea calcular que especificaciones se deben requerir en el pliego para que la probabilidad de que por lo menos 20 duren menos de 18.5 años sea inferior al 10 %. Entiéndase por especificaciones la media de vida útil del panel, manteniendo constante la varianza.

Ante la imposibilidad de mejorar la media de la vida útil, finalmente se ha recurrido a contratar una segunda empresa instaladora que asegura que cada panel está también normalmente distribuido y tiene una media $m = 20$ años y $\sigma = 1.8$ años. Si cada empresa instala el mismo número de paneles, ¿cuál es la probabilidad que tomando un panel al azar que dure menos de 18.5 años, este haya sido instalado para la segunda empresa?

——————————SOLUCIÓN——————————

Sea X la vida útil de un pnale. Sabemos que $X \equiv N(20, \sigma = 1.2)$. Llamemos éxito al suceso "un panel dura menos de 18.5 años". La probabilidad de este suceso es

$$P[X \leq 18.5] = F_X(18.5) = F_U\Big(\frac{18.5 - 20}{1.2}\Big) = F_U(-1.25) = 0.1056$$

Si tenemos 210 paneles y suponemos que su duración es independiente, el número N de paneles que durarán menos de 18.5 será $N \equiv B(210, p)$ donde p es la probabilidad calculada anteriormente, es decir $N \equiv B(210, 0.1056)$.

Queremos calcular la probabilidad de que en los 210 paneles haya al menos 20 "éxitos". Es decir

$$P[N \geq 20] = 1 - F_N(19) = 1 - \sum_{i=0}^{19} P_N(i) = 1 - \sum_{i=0}^{19} \binom{100}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

Como $np \approx 22.19$ y $n(1-p) \approx 187.8$ podemos aproximar esta binomial por una normal a efectos de cálculo, es decir $N \equiv B(210, 0.1056) \approx N(np, \sigma^2 = np(1-p)) = N(22.19, \sigma^2 = 19.84)$

Entonces

$$P[N \geq 20] = 1 - F_N(19) = 1 - F_U\Big(\frac{19.5 - 22.19}{4.45}\Big) = 1 - F_U(-0.603) = 1 - 0.273 = 0.727$$

Luego la probabilidad pedida es

$$p = 72.7\,\%$$

En este caso, lo que se pide es el valor de la media de la vida útil de un panel, esto es: $X \equiv N(m_x, \sigma = 1.2)$. Determinar el valor de m_x para que la probabilidad de que al menos 20 panales duren menos de 18.5 años sea inferior al 10 %.

En este caso $N \equiv B(210, p) \approx N(np, \sigma^2 = np(1-p)) = N(210p, \sigma^2 = 210p(1-p))$. Asumiendo que $np > 5$ y $n(1-p) > 5$

$$P[N \geq 20] = 1 - F_N(19) = 1 - F_U\Big(\frac{19.5 - 210p}{\sqrt{210p(1-p)}}\Big) \leq 0.1$$

De la ecuación anterior obtenemos que

$$F_U\Big(\frac{19.5 - 210p}{\sqrt{210p(1-p)}}\Big) \geq 0.9$$

Buscando en la tabla obtenemos:

$$\frac{19.5 - 210p}{\sqrt{210p(1-p)}} = 1.282$$

Despejando

$$p \leq 0.0702$$

Ahora debemos buscar el valor de la media de X tal que obtenemos el valor de $p = 0.0702$

$$P[X \leq 18.5] = F_X(18.5) = F_U\Big(\frac{18.5 - m_x}{1.2}\Big) = 0.0702$$

$$\frac{18.5 - m_x}{1.2} = -1.4743$$

Y despejando obtenemos que $m_x = 20.27$ años.

En el caso de que haya dos empresas instaladoras. Llamemos Y la vida útil de un panel de la segunda empresa. Sabemos que $Y \equiv N(20, \sigma = 1.8)$

$$P[X \leq 18.5] = F_X(18.5) = F_U\Big(\frac{18.5 - 20}{1.2}\Big) = F_U(-1.25) = 0.1056$$
$$P[Y \leq 18.5] = F_Y(18.5) = F_U\Big(\frac{18.5 - 20}{1.8}\Big) = F_U(-0.833) = 0.2023$$

Llamemos C al suceso, "‘un panel tomado al azar ha durado menos de 18.5 años"’.

Por tanto la probabilidad solicitada es:

$$P[Y \leq 18.5|C] = \frac{P[C|Y \leq 18.5]P[Y \leq 18.5]}{P[C]}$$

donde $P[C]$ la podemos calcular aplicando el teorema de la probabilidad total

$$P[C] = P[Y \leq 18.5]0.5 + 0.5P[X \leq 18.5] = 0.1540$$

Y por tanto la probabilidad pedida es

$$P[Y \leq 18.5|C] = \frac{0.2023 \times 0.5}{0.1540} = 0.6568$$

2.– Un fabricante de cemento está considerando alquilar una máquina empacadora a fin de rellenar automáticamente sacos de 50 Kg. nominales. Tiene dos ofertas: una máquina denominada "A", que rellena los sacos de una manera aleatoria con una desviación típica de 3 Kg. con respecto a la cantidad media de ajuste, y otra, denominada "B", cuya desviación típica es de 2.5 Kg. Si ambas máquinas son ajustables, de forma que puede regularse el peso medio de llenado, y las distribuciones correspondientes pueden considerarse normales,

a) ¿Cómo han de regularse dichas empacadoras para tener la seguridad que un saco cualquiera empacado por ellas tiene 50 Kg. o más con una probabilidad de 0.999?

b) El Kg. de cemento cuesta 0.06 €. El coste diario de la máquina "A" es de 60 € y 72 € el de la máquina "B". Si en un día se llenan 100 sacos, ¿qué máquina debe alquilarse? Téngase en cuenta, si es necesario, el resultado del apartado anterior.

c) Una vez tomada la decisión correspondiente, ¿cuánto cuesta el saco de cemento?

SOLUCIÓN

a) Sea X_A y X_B el peso de relleno de los sacos con las máquinas A y B, respectivamente. Sabemos que

$$X_A \equiv N(m_A, \sigma_A = 3), \quad X_B \equiv N(m_B, \sigma_A = 3)$$

donde m_A y m_B son regulables.

Queremos calcular m_A y m_B de forma que $P[X_A \geq 50] = 0.999$ y $P[X_B \geq 50] = 0.999$. Entonces

$$P[X_A \geq 50] = 1 - F_{X_A}(50) = 1 - F_U\Big(\frac{50 - m_A}{\sigma_A}\Big) \quad \Rightarrow \quad \frac{50 - m_A}{\sigma_A} = -3.09$$

y por lo tanto

$$m_A = 50 + 3.09\sigma_A = 59.27 \text{ Kg.}$$

e igualmente

$$m_B = 50 + 3.09\sigma_B = 57.725 \text{ Kg.}$$

b) El coste diario de la máquina A, por saco, es de 0.6 € y el de la máquina B es de 0.72 €. Sean Y_A e Y_B el precio de cada saco. Podemos escribir

$$Y_A = 0.6 + 0.06X_A \quad \text{e} \quad Y_B = 0.6 + 0.06X_B$$

Las esperanzas matemáticas de estos precios son

$$E[Y_A] = 0.6 + 0.06E[X_A] = 59.27 \times 0.06 + 0.6 = 4.1562€$$

$$E[Y_B] = 0.6 + 0.06E[X_B]57.725 \times 0.06 + 0.72 = 4.1835€$$

luego debe alquilarse la máquina A.

c) El coste del saco de cemento, $C = Y_A$, es, por lo tanto $C = 0.6 + 0.06X_A$. Como X_A es normal, C también lo será, siendo sus parámetros $E[C] = 0.6+0.06E[X_A] = 0.6+0.06\times 59.27 = 4.1562$ y $Var[C] = 0.06^2 Var[X_A] = 0.0036 \times 9 = 0.324$. Luego

$$C \equiv N(4.1562, \sigma = 0.569)$$

3.– Cierta compañía aérea con dificultades financieras observa que, de media, sólo el 88 % de los pasajeros que adquieren un billete llegan a embarcar. Con el fin de mejorar sus beneficios, la compañía decide vender un número de plazas a mayores de los asientos disponibles. Suponiendo que todos los billetes ofertados por la compañía son comprados y que los aviones tienen una capacidad de 200 plazas, ¿cuántas plazas puede vender como máximo a mayores en un vuelo para que la probabilidad de que haya ”overbooking” sea inferior al 1 %?

—————————SOLUCIÓN—————————

Sea N el número de asientos reservados. Como en todos los vuelos se cubren todas las reservas disponibles, $N = 200{+}t$. Un pasajero con reserva puede que tome el avión con una probabilidad ($p = 0.88$) o que no lo tome ($p = 0.12$). Sea M el número de pasajeros que acuden a embarcar. Obviamente, $M \equiv B(N,p) = B(200+t, 0.88)$. Habrá ”overbooking” si $M > 200$. Luego la probabilidad de ”overbooking” en un vuelo es $P[M > 200] = 1 - P[M \leq 200] = 1 - F_M(200)$.

Suponiendo que Np y $N(1-p)$ tienen valores elevados,

$$M \equiv B(200+t, 0.88) \approx N\big(Np, Np(1-p)\big) = N(0.88 \times (200+t), 0.12 \times 0.88 \times (200+t))$$

y consecuentemente

$$F_M(200) = F_U\Big(\frac{200.5 - 0.88 \times (200+t)}{\sqrt{0.12 \times 0.88 \times (200+t)}}\Big) = 0.99$$

De la tabla de la Normal obtenemos:

$$\frac{200.5 - 0.88 \times (200+t)}{\sqrt{0.12 \times 0.88 \times (200+t)}} = 2.326348$$

Despejando obtenemos que $t = 15.238$.

Como máximo podrán ofertar 15 plazas más por vuelo.

4.– En la ejecución de una obra es crucial la correcta planificación de las diferentes actividades. En una carretera la incertidumbre asociada a la climatología puede afectar a la duración de la ejecución. En el PG-3 se establece como limitación para la puesta en obra de mezclas bituminosas que la temperatura sea superior a 5ºC y que no se produzcan precipitaciones atmosféricas. Se estima que la probabilidad de que en un día se pueda asfaltar es $p = 0.85$ y que son independientes. Si un día tiene las condiciones climáticas adecuadas, se extiende una longitud de asfalto X que está exponencialmente distribuido con parámetro $\lambda = 1/100$. Se pide:

a) Calcular la probabilidad de que un día no se extienda asfalto.

b) Calcular la probabilidad de que en una semana laboral de 5 días se pueda extender asfalto al menos 4 días.

c) Definir la distribución de la variable aleatoria: longitud de asfalto extendido en 1 día.

d) Si se dan 3 días con condiciones adecuadas, ¿cuál es la probabilidad de que se extienda más de 300 metros?

—————————SOLUCIÓN—————————

Sea N el número de días que se tienen las condiciones para asfaltar y X_i la longitud de asfalto extendido en un día i con condiciones climáticas adecuadas. Los datos dicen que $N \equiv B(n, p = 0.85)$ y $X_i \equiv EX(\lambda = 1/100)$. Donde n es el número de experimentos

a)

La probabilidad de que en un día no se extienda asfalto es la probabilidad de que no haya habido las condiciones climáticas adecuadas. Es decir, $P[N = 0]$, donde $N \equiv N(p = 0.85, 1)$ o lo que es lo mismo

$$P_N(0) = 1 - p = 1 - 0.85 = 0.15$$

b) Si consideramos la semana laboral de 5 días, $N \equiv B(5, p = 0.85)$ y se pide $P[N \geq 4]$

$$P[N \geq 4] = P_N(4) + P_N(5) = 0.3915 + 0.4437 = 0.8352$$

c) La variable Z es la cantidad de asfalto extendido en 1 día y es una variable mixta.

$$P_Z(0) = P[Z = 0] = P[N = 0] = P_N(0) = 1 - p$$

Para $Z > 0$

$$F_Z(z) = P[Z \leq z] = P[N = 0] + P[X \leq z | N > 0] P[N > 0] = 1 - p + (1 - e^{-\lambda z})(p)$$

d) Sea W la longitud del asfalto extendido en 3 días con condiciones adecuadas $W = X_1 + X_2 + X_3$. Por tanto es la suma de tres variables exponenciales. Suponiendo que son independientes $W \equiv \Gamma(3, \lambda)$

La probabilidad solicitada será por tanto:

$$P[W > 300] = 1 - F_W(300)$$

Si entramos en la tabla de la distribución Γ con $x = 2 \cdot 300 \cdot 1/100 = 6$ y $v = 2 \cdot 3 = 6$ se obtiene que $F_W(300) = 0.576810$ y por tanto la probabilidad pedida será

$$P[W > 300] = 1 - F_W(300) = 1 - 0.576810 = 0.42319$$

5.– Para la perforación de suelos duros una empresa dispone de dos tipos de brocas. La broca de la marca A tiene una duración de media de 1400 horas y una desviación típica de 200 horas. El mismo tipo de broca de la marca B tiene una duración media de 1200 horas y una desviación típica de 100 horas. Considerando que ambas duraciones pueden considerarse variables aleatorias normalmente distribuidas, se pide:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la broca de la marca A tenga una duración mayor a 250 horas a la duración broca de la marca B?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la duración de la broca de la marca A supere en un 20 % la duración de la broca de la marca B?

c) Si hay disponibles dos brocas de la marca A y dos brocas de la marca B brocas y se toma una broca al azar y se comprueba que tiene una duración de más de 1300 horas, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la marca B?

SOLUCIÓN

Sea T_A la duración de una bronca de la marca A, donde $T_A \equiv N(1400, 200^2)$ y T_B la duración de una bronca de la marca B, donde $T_B \equiv N(1200, 100^2)$.

a) En este apartado se busca calcular la siguiente probabilidad $P[T_A > T_B + 250]$ o lo que es lo mismo $P[T_A - T_B > 250] = 1 - P[T_A - T_B \leq 250] = 1 - P[T \leq 250]$, donde $T = T_A - T_B \equiv N(200, 200^2 + 100^2)$

$$P[T_A - T_B > 250] = 1 - P[T \leq 250] = 1 - P\left[\frac{T - 200}{\sqrt{200^2 + 100^2}} \leq \frac{250 - 200}{\sqrt{200^2 + 100^2}}\right] =$$

$$= 1 - P\left[U \leq \frac{250 - 200}{\sqrt{200^2 + 100^2}}\right] = 1 - 0.58847 = 0.41153$$

b) Se pide calcular $P[T_A > 1.2\ T_B]$ o lo que es lo mismo $P[T_A - 1.2\ T_B > 0]$. Sea $R = 1.2\ T_B$, la distribución de R será normal con parámetros $R \equiv N(1.2\ 1200, 1.2^2\ 100^2) = N(1440, 120^2)$ Por tanto

$$P[T_A - 1.2\ T_B > 0] = P[T_A - R > 0] = P[Z > 0]$$

donde $Z \equiv N(-40, 200^2 + 120^2)$

$$P[T_A - 1.2\ T_B > 0] = P[T_A - R > 0] = P[Z > 0] = 1 - P\left[\frac{Z + 40}{\sqrt{200^2 + 120^2}} \leq \frac{0 + 40}{\sqrt{200^2 + 120^2}}\right] =$$

$$= 1 - P\left[U \leq \frac{40}{\sqrt{200^2 + 120^2}}\right] = 1 - 0.5681 = 0.4319$$

c) Las probabilidad solicitada se puede calcular mediante el Teorema de Bayes:

$$P\left[B|T > 1300\right] = \frac{P\left[T > 1300|B\right] P\left[B\right]}{P\left[T > 1300\right]}$$

donde $P\left[T > 1300\right]$ la podemos calcular mediante el Teorema de la Probabilidad Total

$$P\left[T > 1300\right] = P\left[T > 1300|A\right] P\left[A\right] + P\left[T > 1300|B\right] P\left[B\right]$$

o lo que es lo mismo

$$P\left[T > 1300\right] = P\left[T_A > 1300\right] P\left[A\right] + P\left[T_B > 1300\right] P\left[B\right] = P\left[T_A > 1300\right] =$$

$$= P\left[U > \frac{1300 - 1400}{200}\right] \frac{1}{2} + P\left[U > \frac{1300 - 1200}{100}\right] \frac{1}{2} = (1 - F_U(-0.5)) \frac{1}{2} + (1 - F_U(1)) \frac{1}{2} =$$

$$= 0.69146 \frac{1}{2} + 0.158655 \frac{1}{2} = 0.425$$

$$P\left[B|T > 1300\right] = \frac{0.158655 \frac{1}{2}}{0.425} = 0.1866$$