CPE (SEGUNDO CURSO)

PRÁCTICA 10 **SOLUCIONES** (**Curso 2023–2024**)

1.– Para la perforación de suelos duros una empresa dispone de dos tipos de brocas. La broca de la marca A tiene una duración de media de 1400 horas y una desviación típica de 200 horas. El mismo tipo de broca de la marca B tiene una duración media de 1200 horas y una desviación típica de 100 horas. Considerando que ambas duraciones pueden considerarse variables aleatorias normalmente distribuidas, se pide:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la broca de la marca A tenga una duración mayor a 250 horas a la duración broca de la marca B?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la duración de la broca de la marca A supere en un 20 % la duración de la broca de la marca B?

c) Si hay disponibles dos brocas de la marca A y dos brocas de la marca B brocas y se toma una broca al azar y se comprueba que tiene una duración de más de 1300 horas, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la marca B?

—————————SOLUCIÓN—————————

Sea T_A la duración de una bronca de la marca A, donde $T_A \equiv N(1400, 200^2)$ y T_B la duración de una bronca de la marca B, donde $T_B \equiv N(1200, 100^2)$.

a) En este apartado se busca calcular la siguiente probabilidad $P[T_A > T_B + 250]$ o lo que es lo mismo $P[T_A - T_B > 250] = 1 - P[T_A - T_B \leq 250] = 1 - P[T \leq 250]$, donde $T = T_A - T_B \equiv N(200, 200^2 + 100^2)$

$$P[T_A - T_B > 250] = 1 - P[T \leq 250] = 1 - P\left[\frac{T-200}{\sqrt{200^2+100^2}} \leq \frac{250-200}{\sqrt{200^2+100^2}}\right] =$$

$$= 1 - P\left[U \leq \frac{250-200}{\sqrt{200^2+100^2}}\right] = 1 - 0.58847 = 0.41153$$

b) Se pide calcular $P[T_A > 1.2\ T_B]$ o lo que es lo mismo $P[T_A - 1.2\ T_B > 0]$. Sea $R = 1.2\ T_B$, la distribución de R será normal con parámetros $R \equiv N(1.2\ 1200, 1.2^2\ 100^2) = N(1440, 120^2)$ Por tanto

$$P[T_A - 1.2\ T_B > 0] = P[T_A - R > 0] = P[Z > 0]$$

donde $Z \equiv N(-40, 200^2 + 120^2)$

$$P[T_A - 1.2\ T_B > 0] = P[T_A - R > 0] = P[Z > 0] = 1 - P\left[\frac{Z+40}{\sqrt{200^2+120^2}} \leq \frac{0+40}{\sqrt{200^2+120^2}}\right] =$$

$$= 1 - P\left[U \leq \frac{40}{\sqrt{200^2+120^2}}\right] = 1 - 0.5681 = 0.4319$$

c) Las probabilidad solicitada se puede calcular mediante el Teorema de Bayes:

$$P\left[B|T>1300\right]=\frac{P\left[T>1300|B\right]P\left[B\right]}{P\left[T>1300\right]}$$

donde $P\left[T>1300\right]$ la podemos calcular mediante el Teorema de la Probabilidad Total

$$P\left[T>1300\right]=P\left[T>1300|A\right]P\left[A\right]+P\left[T>1300|B\right]P\left[B\right]$$

o lo que es lo mismo

$$P\left[T>1300\right]=P\left[T_A>1300\right]P\left[A\right]+P\left[T_B>1300\right]P\left[B\right]=P\left[T_A>1300\right]=$$

$$=P\left[U>\frac{1300-1400}{200}\right]\frac{1}{2}+P\left[U>\frac{1300-1200}{100}\right]\frac{1}{2}=\left(1-F_U(-0.5)\right)\frac{1}{2}+\left(1-F_U(1)\right)\frac{1}{2}=$$

$$=0.69146\frac{1}{2}+0.158655\frac{1}{2}=0.425$$

$$P\left[B|T>1300\right]=\frac{0.158655\frac{1}{2}}{0.425}=0.1866$$

2.– Durante el estudio de una ciertas barras de acero para armar hormigón se llega a las siguientes conclusiones:

a) El límite elástico, S es una variable logarítmico–normal de parámetros

$$\breve{m}_S=30\ Kg/mm^2 \qquad y \qquad \sigma_{lnS}=0.1$$

b) El área de la sección transversal de las barras, A, es una variable logarítmico–normal de media 6.25 cm^2 y desviación típica 0.313 cm^2

Se pide:

1) Calcular la distribución de la resistencia límite $R=S\times A$

2) Calcular $P[S\leq 26\ Kg/mm^2.]$

3) Calcular la carga máxima admisible, F_M, tal que $P[R\leq F_M]=0.01$

Especificar las hipótesis que se realicen.

———————SOLUCIÓN———————

1) Sabemos que, si S y A son independientes, la variable $R=SA$ es también logarítmico-normal.

Aplicando las fórmulas que relacionan los parámetros de una logarítmico-normal con su media y desviación típica

$$\sigma^2_{\ln A}=\ln\left(1+\frac{\sigma_A^2}{m_A^2}\right), \qquad \breve{m}_A=m_A e^{-\frac{\sigma^2_{\ln A}}{2}}$$

obtenemos que $\sigma^2_{\ln A}=0,002504866$, $\breve{m}_A=624,2177192$ (hemos expresado la variable A en mm^2 para operarla con S)

En definitiva, R es logarítmico-normal con parámetros

$$\breve{m}_R = \breve{m}_S \breve{m}_A = 18726,53158, \qquad \sigma_{\ln R} = \sqrt{\sigma^2_{\ln S} + \sigma^2_{\ln A}} = 0,111825162 \qquad \text{(en Kg)}$$

2) $P[S \leq 26] = P[\ln S \leq \ln 26]$. Como $\ln S$ es una variable normal con media $\ln \breve{m}_S$ y desviación típica $\sigma_{\ln S}$, esta probabilidad se calcula como

$$P[Z \leq \frac{\ln 26 - \ln 30}{0,1}] = 0,07625$$

(donde Z es una normal $(0,1)$)

3) Se trata de calcular F_M tal que $P[R \leq F_M] = 0,01$ siendo R una variable logarítmico-normal con los parámetros descritos en el apartado 1).

$$0,01 = P[R \leq F_M] = P[\ln R \leq \ln F_M] = P[Z \leq \frac{\ln F_M - \ln \breve{m}_R}{\sigma_{\ln R}}]$$

donde Z es una normal $(0,1)$. Consultando en las tablas de percentiles deducimos

$$\frac{\ln F_M - \ln \breve{m}_R}{\sigma_{\ln R}} = -2,326$$

y por lo tanto $F_M = 14438$ Kg.

3.– En la ejecución de una obra es crucial la correcta planificación de las diferentes actividades. En una carretera la incertidumbre asociada a la climatología puede afectar a la duración de la ejecución. En el PG-3 se establece como limitación para la puesta en obra de mezclas bituminosas que la temperatura sea superior a 5ºC y que no se produzcan precipitaciones atmosféricas. Se estima que la probabilidad de que en un día se pueda asfaltar es $p = 0.85$ y que son independientes. Si un día tiene las condiciones climáticas adecuadas, se extiende una longitud de asfalto X que está exponencialmente distribuido con parámetro $\lambda = 1/100$. Se pide:

a) Calcular la probabilidad de que un día no se extienda asfalto.

b) Calcular la probabilidad de que en una semana laboral de 5 días se pueda extender asfalto al menos 4 días.

c) Definir la distribución de la variable aleatoria: longitud de asfalto extendido en 1 día.

d) Si se dan 3 días con condiciones adecuadas, ¿cuál es la probabilidad de que se extienda más de 300 metros?

——————————SOLUCIÓN——————————

Sea N el número de días que se tienen las condiciones para asfaltar y X_i la longitud de asfalto extendido en un día i con condiciones climáticas adecuadas. Los datos dicen que $N \equiv B(n, p = 0.85)$ y $X_i \equiv EX(\lambda = 1/100)$. Donde n es el número de experimentos

a)

La probabilidad de que en un día no se extienda asfalto es la probabilidad de que no haya habido las condiciones climáticas adecuadas. Es decir, $P[N = 0]$, donde $N \equiv N(p = 0.85, 1)$ o lo que es lo mismo

$$P_N(0) = 1 - p = 1 - 0.85 = 0.15$$

b) Si consideramos la semana laboral de 5 días, $N \equiv B(5, p = 0.85)$ y se pide $P[N \geq 4]$

$$P[N \geq 4] = P_N(4) + P_N(5) = 0.3915 + 0.4437 = 0.8352$$

c) La variable Z es la cantidad de asfalto extendido en 1 día y es una variable mixta.

$$P_Z(0) = P[Z = 0] = P[N = 0] = P_N(0) = 1 - p$$

Para $Z > 0$

$$F_Z(z) = P[Z \leq z] = P[N = 0] + P[X \leq z | N > 0]P[N > 0] = 1 - p + (1 - e^{-\lambda z})(p)$$

d) Sea W la longitud del asfalto extendido en 3 días con condiciones adecuadas $W = X_1 + X_2 + X_3$. Por tanto es la suma de tres variables exponenciales. Suponiendo que son independientes $W \equiv \Gamma(3, \lambda)$

La probabilidad solicitada será por tanto:

$$P[W > 300] = 1 - F_W(300)$$

Si entramos en la tabla de la distribución Γ con $x = 2 \cdot 300 \cdot 1/100 = 6$ y $v = 2 \cdot 3 = 6$ se obtiene que $F_W(300) = 0.576810$ y por tanto la probabilidad pedida será

$$P[W > 300] = 1 - F_W(300) = 1 - 0.576810 = 0.42319$$

4.– Cierta compañía aérea con dificultades financieras observa que, de media, sólo el 88 % de los pasajeros que adquieren un billete llegan a embarcar. Con el fin de mejorar sus beneficios, la compañía decide vender un número de plazas a mayores de los asientos disponibles. Suponiendo que todos los billetes ofertados por la compañía son comprados y que los aviones tienen una capacidad de 200 plazas, ¿cuántas plazas puede vender como máximo a mayores en un vuelo para que la probabilidad de que haya "overbooking" sea inferior al 1 %?

——————SOLUCIÓN——————

Sea N el número de asientos reservados. Como en todos los vuelos se cubren todas las reservas disponibles, $N = 200+t$. Un pasajero con reserva puede que tome el avión con una probabilidad ($p = 0.88$) o que no lo tome ($p = 0.12$). Sea M el número de pasajeros que acuden a embarcar. Obviamente, $M \equiv B(N, p) = B(200 + t, 0.88)$. Habrá "overbooking" si $M > 200$. Luego la probabilidad de "overbooking" en un vuelo es $P[M > 200] = 1 - P[M \leq 200] = 1 - F_M(200)$.

Suponiendo que Np y $N(1 - p)$ tienen valores elevados,

$$M \equiv B(200 + t, 0.88) \approx N\big(Np, Np(1 - p)\big) = N(0.88 \times (200 + t), 0.12 \times 0.88 \times (200 + t))$$

y consecuentemente

$$F_M(200) = F_U\Big(\frac{200.5 - 0.88 \times (200 + t)}{\sqrt{0.12 \times 0.88 \times (200 + t)}}\Big) = 0.99$$

De la tabla de la Normal obtenemos:

$$\frac{200.5 - 0.88 \times (200 + t)}{\sqrt{0.12 \times 0.88 \times (200 + t)}} = 2.326348$$

Despejando obtenemos que $t = 15.238$.

Como máximo podrán ofertar 15 plazas más por vuelo.

5.– En un análisis de movilidad entre dos grandes urbes hay tres modos principales de transporte entre ellas tren, autobús y vehículo privado. Se han recopilado los siguientes datos a partir de encuentas, geolocalización de móviles, cámaras de tráfico y de las empresas concesionarias y se estima que el 40 % de los viajeros emplea el tren, un 15 % el autobús y un 45 % el vehículo privado.

Adicionalmente se calculan los tiempos de viaje empleando los tres modos de transportes, que se suponen normalmente distribuidos con parámetros expresado en minutos:

	Tren	**Autobús**	**Vehículo Privado**
Media	25	35	30
Desviación típica	3	10	7.5

a) Un viajero escoge un modo de transporte al azar, ¿cuál es la probabilidad de que el viaje tarde menos de 30 minutos?

b) Si un viaje ha durado menos de 30 minutos, ¿cuál es la probabilidad de que provenga de cada uno de los modos de transporte?

——————————SOLUCIÓN——————————

Sean T_A, T_B y T_C los tiempos de viaje asociados al tren, autobús y vehículo privado, respectivamente.

Del enunciado sabemos que $T_A \equiv N(m_A = 25, \sigma_A^2 = 3^2)$, $T_B \equiv N(m_B = 35, \sigma_B^2 = 10^2)$ y $T_C \equiv N(m_C = 30, \sigma_C^2 = 7.5^2)$.

a) Sea T la duración del viaje empleando un modo de transporte al azar, nos piden calcular $P[T \leq 30]$. Aplicando el teorema de la probabilidad total:

$$\begin{aligned} P[T \leq 30] &= P[T \leq 30|A]P[A] + P[T \leq 30|B]P[B] + P[T \leq 30|C]P[C] = \\ &= P[T_A \leq 30]P[A] + P[T_B \leq 30]P[B] + P[T_C \leq 30]P[C] \end{aligned}$$

Los datos proporcionados por el enunciado son:

$$P[A] = 0.40, \quad P[B] = 0.15, \quad P[C] = 0.45.$$

A partir de las distribución, conocida, podemos calcular:

$$P[T \leq 30|A] = P[T_A \leq 30] = P\left[U \leq \frac{30-25}{3}\right] = P\left[U \leq \frac{5}{3}\right] = 0.9522$$

$$P[T \leq 30|B] = P[T_B \leq 30] = P\left[U \leq \frac{30-35}{10}\right] = P\left[U \leq \frac{-1}{2}\right] = 0.3085$$

$$P[T \leq 30|C] = P[T_C \leq 30] = P\left[U \leq \frac{30-30}{7.5}\right] = P\left[U \leq 0\right] = 0.5$$

Por tanto, la probabilidad pedida es

$$P[T \leq 30] = P[T \leq 30|A]P[A] + P[T \leq 30|B]P[B] + P[T \leq 30|C]P[C] =$$

$$= 0.9522 \cdot 0.40 + 0.3085 \cdot 0.15 + 0.5 \cdot 0.55 = 0.6521 \approx 65\,\%.$$

b)En este apartado nos piden calcular $P[A|T \leq 30]$, $P[B|T \leq 30]$ y $P[C|T \leq 30]$. Entonces, aplicando el teorema de Bayes obtenemos

$$P[A|T \leq 30] = \frac{P[T \leq 30|A]P[A]}{P[T \leq 30]} = \frac{0.9522 \cdot 0.4}{0.6521} = 0.5840,$$
$$P[B|T \leq 30] = \frac{P[T \leq 30|B]P[B]}{P[T \leq 30]} = \frac{0.3085 \cdot 0.15}{0.6521} = 0.07096,$$
$$P[C|T \leq 30] = \frac{P[T \leq 30|C]P[C]}{P[T \leq 30]} = \frac{0.5 \cdot 0.55}{0.6521} = 0.3450.$$