CPE (SEGUNDO CURSO)

PRÁCTICA 9 **SOLUCIONES** (**Curso 2023–2024**)

1.– La concesionaria del mantenimiento y conservación del puente de la Constitución de 1812 de Cádiz decide diseñar un plan de cambio de bombillas en el sistema de iluminación de las vías, que consta de 200 farolas. La concesionaria te encarga que hagas el siguiente análisis:

Si se decide no sustituir ninguna bombilla al fallar:

(a) Calcular la distribución de la vida de todo el sistema, es decir, el tiempo hasta que la última bombilla deja de funcionar.

(b) En el contrato con la administración se establece, que por motivos de seguridad, debe de haber al menos un 80 % de ellas operativas. ¿Cuál es la probabilidad de que a los 2 años se haya incumplido el contrato con la administración?

Suponer que cada farola tiene una bombilla y que la duración de la bombilla está exponencialmente distribuida con media de 8 años.

——————SOLUCIÓN——————

a) Sea X la vida de una farola, $X \equiv EX(\lambda)$, con $\lambda = \frac{1}{8}$ años^{-1}.

Se define la variable aleatoria T como la vida total del sistema

Dado que el sistema falla cuando todas las bombillas se funden, $T = max\{X_1, X_2, ..., X_{200}\}$. Por tanto la distribución de T será:

$$P[T \leq t] = P[(X_1 \leq t) \cap (X_2 \leq t) \cap ... \cap (X_{200} \leq t)] = (F_X(t))^{200}$$

Por tanto,

$$F_T(t) = \left(1 - e^{\frac{-t}{8}}\right)^{200}$$

b)

Llamemos éxito a que el suceso "una farola dura menos de 2 años". La probabilidad de este suceso es

$$P[X \leq 2] = 1 - e^{\frac{-2}{8}} = 0.221$$

Si tenemos 200 farolas y suponemos que todas ellas son independientes, el número N de farolas que durarán menos de 2 años será $N \equiv B(200, 0.221)$. Se incumplirá el contrato si a los dos años han fallado más del 20 % de las farolas.

$$P[N > 40] = 1 - P[N \leq 40]$$

Como $np = 44.23 > 5$ y $n(1-p) = 155.8 > 5$ podemos aproximar, a efectos de cálculo, esta binomial por una normal, es decir, $N \equiv B(200, 0.221) \approx N(np, np(1-p)) = N(44.23, 34.43)$. Por tanto, la probabilidad pedida será:

$$P[N > 40] = 1 - P[N \leq 40] = 1 - F_U\left(\frac{40.5 - 44.23}{\sqrt{34.43}}\right) = 1 - F_U\left(-0.636\right) = 0.738$$

Si se decide no cambiar ninguna bombilla en los dos primeros años, hay un 73.8 % de incumplir el contrato de mantenimiento.

2.– Se sabe que en una determinada zona geográfica, el coste medio por hogar de la factura de la luz sigue una distribución normal de 60 euros/mes. También se sabe que el porcentaje de hogares que pagan menos de 35 euros es del 13 %. Se desea conocer:

a) ¿Qué porcentaje de hogares paga una factura comprendida entre 40 y 80 euros?

b) Si tomamos una muestra de 100 hogares, ¿qué probabilidad hay que al menos 10 hogares paguen menos de 35 euros al mes de factura?

c) En la misma región, la factura de abastecimiento de agua se distribuye normalmente con media 30 euros y desviación típica 10 euros. Si los importes de las facturas se consideran independientes, ¿qué porcentaje de hogares pagan unas facturas por servicios de agua y luz superior a los 100 euros?

——————SOLUCIÓN——————

Para definir por completo la variable X, coste medio por hogar de la factura de la luz, necesitamos la desviación típica. Sabemos que

$$P[X \leq 35] = 0.13 = F_X(35) = F_U\left(\frac{35 - m}{\sigma}\right) = F_U\left(\frac{35 - 60}{\sigma}\right) = F_U\left(\frac{-25}{\sigma}\right)$$

y de las tablas obtenemos

$$\frac{-25}{\sigma} = -1.13 \;\Rightarrow\; \sigma = 22.12$$

y ya podemos calcular las cuestiones que se nos hacen

a)

$$P[40 \leq X \leq 80] = F_X(80) - F_X(40) = F_U\left(\frac{80 - 60}{22.12}\right) - F_U\left(\frac{40 - 60}{22.12}\right) =$$

$$= F_U(0.904) - F_U(-0.904) = 0.817 - 0.183 = 0.634$$

b) Sea W una variable Binomial, donde tenemos 100 experimentos y la probabilidad de éxito es de 0.13 $W \equiv B(n = 100, p = 0.13)$

$$P[W \geq 10] = 1 - P[W \leq 9]$$

También podemos aplicar la aproximación de Yates, donde $W' \equiv N(np = 13, np(1-p) = 11.31)$

$$P[W \geq 10] = 1 - P[W \leq 9] = 1 - P[W' \leq 9.5] = 1 - F_U\Big(\frac{9.5 - 13}{3.363}\Big) = 1 - 0.149 = 0.851 \approx 85\,\%$$

c) Si llamamos Y a la factura del agua y Z a la suma de ambas facturas, es evidente que $Z = X + Y$. Como X e Y son independientes, $Z \equiv N(90, \sigma^2 = 589.46) = N(200, \sigma = 24.28)$. Por tanto

$$P[Z > 100] = 1 - F_Z(100) = 1 - F_U\Big(\frac{100 - 90}{24.28}\Big) =$$
$$= 1 - F_U(0.412) = 1 - 0.660 = 0.3403 \approx 34\,\%$$

3.– Un cierto sistema está compuesto por tres elementos conectados en serie. Consecuentemente, el sistema falla si cualquiera de ellos falla. Dichos elementos funcionan independientemente. El tiempo de vida de cada elemento (medido en horas) puede considerarse normalmente distribuido, con media 125 horas y desviación típica 20 horas.

a) Determínese la probabilidad de que el sistema funcione al menos durante 100 horas.

b) ¿Cuántos elementos de este tipo se pueden conectar como máximo en serie si queremos que la probabilidad mencionada en el apartado anterior no sea inferior al 50 %.?

c) Si en lugar de conectar los tres elementos en serie los colocamos en paralelo, de forma que con uno de ellos funcionando funcionase todo el sistema, ¿cuál será en este caso la probabilidad de que la duración del sistema supere las 100 horas?

d) Ahora colocamos los elementos en pararalelo, pero con un funcionamiento diferente. Empieza a funcionar el primero, cuando falla empieza el segundo, y cuando falla empieza el tercero. ¿Cuál será en este caso la probabilidad de que la duración del sistema supere las 100 horas?

SOLUCIÓN

a) Sea Y el tiempo de vida mínimo del sistema. Si llamamos X_1, X_2 y X_3 al tiempo de vida de cada uno de los tres elementos, $Y = min\{X_1, X_2, X_3\}$ Por tanto

$$P[Y > y] = P\Big[(X_1 > y) \cap (X_2 > y) \cap (X_3 > y)\Big] = (1 - F_{X_1}(y))(1 - F_{X_2}(y))(1 - F_{X_3}(y)) = \Big[(1 - F_X(y))\Big]^3$$

teniendo en cuenta independencia, y siendo X la vida de uno cualquiera de los tres elementos.

Por tanto

$$P[Y > 100] = \Big[(1 - F_X(100))\Big]^3 = \Bigg[\Bigg(1 - F_U\Big(\frac{100 - 125}{20}\Big)\Bigg)\Bigg]^3 = \Bigg[\Bigg(1 - F_U(-1.25)\Bigg)\Bigg]^3 = 0.8944^3 = 0.715$$

b) Nuestra ecuación sería ahora, si n es el número de elementos conecatdos en serie,

$$\left[\left(1 - F_U(-1.25)\right)\right]^n = 0.5 \quad \Rightarrow \quad 0.8944^n = 0.5 \quad \Rightarrow \quad n = 6.21$$

luego no se pueden conectar más de seis elentos en serie.

c) Si los conectamos en paralelo, estaríamos hablando del máximo y no del mínimo. Sea $Z = max\{X_1, X_2, X_3\}$. Por consiguiente

$$P[Z \leq z] = P\Big[(X_1 \leq z) \cap (X_2 \leq z) \cap (X_3 \leq z)\Big] = (F_{X_1}(z))(F_{X_2}(z))(F_{X_3}(z)) = \Big[F_X(z)\Big]^3$$

Luego

$$P[Z > 100] = 1 - \Big[F_X(100)\Big]^3 = 1 - \left[F_U\Big(\frac{100-125}{20}\Big)\right]^3 = 1 - \Big[F_U(-1.25)\Big]^3 = 1 - 0.1056^3 = 0.9988$$

Obsérvese que en este caso, la probabilidad aumenta con el número de elementos conectados.

d) Ahora la vida del sistema, R, es la suma de la duración de los tres componentes. Es decir, $R = X_1 + X_2 + X_3$. Pero las tres variables son normales e independientes, con media 125 y varianza 400. Luego R es también normal con media 375 y varianza 1200. Luego

$$P[R > 100] = 1 - F_R(100) = 1 - F_U\Big(\frac{100-375}{\sqrt{1200}}\Big) = 1 - F_U(-7.9386) = 1$$

4.– En un cierto tramo de una carretera comarcal de dos sentidos pasan vehículos a razón de 3 vehículos por minuto en un sentido (sentido A) y 5 vehículos por minuto en el otro (sentido B). Se considera que la llegada de vehículos son llegadas de Poisson. Se pide:

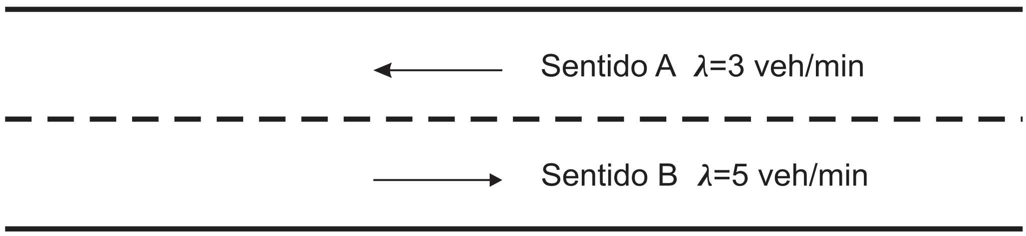
a) Calcular la probabilidad de que en 30 segundos pasen más de 5 vehículos en total.

b) Si en 20 segundos pasa un sólo vehículo, ¿cuál es la probabilidad que circule por el sentido A?

c) Debido a la falta de paso señalizado, un peatón decide cruzar la carretera en un lugar de muy difícil visibilidad. El tiempo que tarda en cruzar la carretera es de 12 segundos. Calcular la probabilidad de que el peatón no sea atropellado. Téngase en cuenta que la carretera consta de dos sentidos de circulación y supóngase que el tiempo usado por el peatón para cruzar cada sentido es el mismo.

SOLUCIÓN

(a)



Sea X el número de vehículos que circulan por el sentido A e Y el que circula por el sentido B. Sabemos que $X \equiv P(\nu_x = \lambda_x T)$ y que $Y \equiv P(\nu_y = \lambda_y T)$. Introduciendo los datos obtenemos que $X \equiv P(1.5)$ e $Y \equiv P(2.5)$. Suponiendo que las llegadas en ambos sentidos son independientes y ya que la distribución de Poisson es regenerativa respecto a la suma, podemos obtener la variable aleatoria Z, que representa el número total de vehículos que circulan por la carretera como

$$Z = X + Y = P(\nu_x + \nu_y) = P(4)$$

Una vez que conocemos la distribución de Z podemos calcular la probabilidad solicitada como

$$P[Z > 5] = 1 - P[Z \leq 5] = 0.21487.$$

(b) Dado que $T = 20$ segundos, las distribuciones de las variables aleatorias X, Y y Z son: $X \equiv P(1)$, $Y \equiv P(\frac{5}{3})$ y $Z \equiv P(\frac{8}{3})$. La probabilidad solicitada es

$$P[X = 1|Z = 1] = \frac{P[Z = 1|X = 1]P[X = 1]}{P[Z = 1|X = 1]P[X = 1] + P[Z = 1|Y = 1]P[Y = 1]},$$

donde

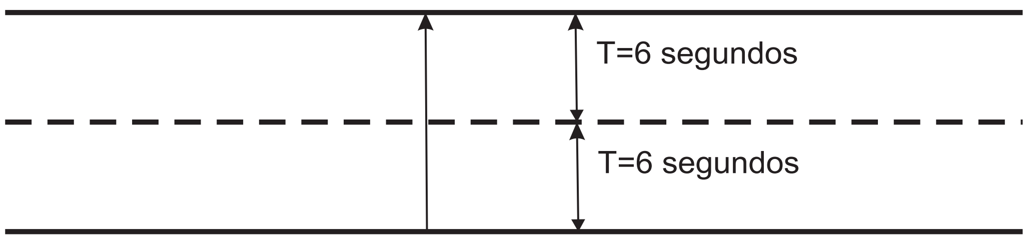
$$\begin{aligned}
&P[Z = 1|X = 1] = P[Y = 0] = 0.1889 \\
&P[Z = 1|Y = 1] = P[X = 0] = 0.3679 \\
&P[X = 1] = 0.3679 \\
&P[Z = 1] = P[Z = 1|X = 1]P[X = 1] + P[Z = 1|Y = 1]P[Y = 1] = \\
&= P[Y = 0]P[X = 1] + P[X = 0]P[Y = 1] = 0.1853.
\end{aligned}$$

Por tanto, la probabilidad solicitada es

$$P[X = 1|Z = 1] = \frac{0.1889 \cdot 0.3679}{0.1853} = 0.3750.$$

Además, por el teorema de la probabilidad total se puede comprobar que la distribución de Poisson es regenerativa respecto a la suma. Dado que conocemos la distribución de la variable aleratoria Z, podemos calcular $P[Z = 1] = \frac{e^{-8/3}(8/3)^1}{1!} = 0.1853$. Se ha obtenido la misma probabilidad, tal y como se esperaba.

(c) El peatón tarda el mismo tiempo en recorrer cada uno de los carriles, es decir, $T = 6$ segundos. Por tanto $X \equiv P(\frac{3}{10})$, $Y \equiv P(\frac{1}{2})$.



Por tanto la probabilidad solicitada es $p = P[X = 0 \cap Y = 0]$, dado que se asumen independientes,

$$p = P[X = 0]P[Y = 0] = \frac{e^{-\frac{3}{10}}(\frac{3}{10})^0}{0!}\frac{e^{-\frac{1}{2}}(\frac{1}{2})^0}{0!} = 0.4493.$$

El peatón tiene una probabilidad de aproximadamente un 55 % de sufrir un atropello.

5.– Una empresa de fabricación de teléfonos móviles ha decidido gastar su presupuesto de marketing y promoción con la siguiente estrategia: cambiará gratuitamente la primera batería de sus teléfonos móviles cuando estén por debajo de un cierto umbral, siempre y cuando el terminal tenga una cierta antigüedad (en años) que debe ser fijada.

El proveedor de las batería asegura que sus baterías tienen una duración normalmente distribuida con media de 4.5 años y una desviación típica de 1.25 años. Si la empresa de telefonía sólo dispone de presupuesto para cambiar un 4 % de las baterías de los teléfonos, se pide calcular:

a) ¿Qué antigüedad debería fijar para no sobrepasar su presupuesto con el cambio gratuito de baterías ?

b) En vez de restringir el cambio solo a la primera batería, ¿cuál es la probabilidad de que en ese periodo de garantía sea necesario realizar un segundo cambio de batería?

Ante el posible impacto de la campaña de marketing en las cuentas de la empresa, ésta decide buscar otro proveedor de baterías, que ofrece un modelo de batería al mismo precio pero que asegura que sus baterías tienen una duración que está normalmente distribuida con una media de 5.5 años y una desviación típica de 2 años.

c) Analizar si le interesa cambiar de proveedor de baterías al fabricante de teléfonos.

Finalmente, el fabricante decide comprar batería a ambos proveedores con una proporción del 40 % al antiguo proveedor y del 60 % al nuevo proveedor y las ensambla en sus nuevos terminales. Se pide calcular:

d) ¿Cuál es la probabilidad de que a un nuevo terminal la batería le dure menos de 3 años?

e) Si llega un terminal al servicio técnico con una batería que ha durado menos de 3 años, ¿cuál es la probabilidad de que provenga del nuevo proveedor?

———————SOLUCIÓN———————

a)Llamemos X a la duración de la batería del antiguo proveedor. Del enunciado $X \equiv N(4.5, 1.25^2)$. Sea t el periodo de garantía en el que se cambia la batería. Primero nos piden calcular el valor de t que verifique

$$P[X \leq t] = 0.04 = F_U\left(\frac{t - 4.5}{1.25}\right) = 0.04 \implies \frac{t - 4.5}{1.25} = -1.75 \implies t = 2.31$$

El fabricante no debería ofrecer un cambio de batería gratuito para terminales de más de 2.31 años.

b)Llamemos Y a la duración de la segunda batería del antiguo proveedor. Suponiendo que tiene la misma duración $Y \equiv N(4.5, 1.25^2)$, la duración total de ambas baterías, Z, será la suma de ambas. Por tanto, suponiendo independencia de las variables, $Z = X + Y \equiv N(9, 3.125)$

$$P[Z \leq 2.31] = F_U\left(\frac{2.31 - 9}{\sqrt(3.125)}\right) = F_U\left(-3.784\right) = 0.000077$$

Por tanto, la empresa podría no limitar el cambio a la primera batería, ya que la probabilidad de que sea necesario un segundo cambio es muy baja.

c)Llamemos W a la duración de la batería del nuevo proveedor. Del enunciado $W \equiv N(5.5, 2^2)$. Sea t_W el periodo de garantía en el que se cambia la batería con las baterías del segundo proveedor. Empleando el mismo proceso de cálculo que con el primer proveedor obtenemos

$$P[W \leq t_W] = 0.04 = F_U\left(\frac{t_W - 5.5}{2}\right) = 0.04 \implies \frac{t_W - 5.5}{2} = -1.75 \implies t_W = 2$$

A igualdad de precio, el periodo que debería de cambio que debería ofrecer con el segundo proveedor es inferior, por lo que le interesa quedarse con el primer proveedor de baterías.

d)Sea T la vida útil de la batería de un terminal. Nos piden calcular $P[T \leq 3]$. Llamemos A a las baterías primer proveedor y B a las baterías del nuevo proveedor. Del enunciado obtenemos que $P[A] = 0.4$ y $P[B] = 0.6$.

Por el Teorema de la Probabilidad Total:

$$P[T \leq 3] = P[T \leq 3|A]P[A] + P[T \leq 3|B]P[B] = P[X \leq 3]P[A] + P[W \leq 3]P[B] =$$

$$= 0.1151 \times 0.4 + 0.10565 \times 0.6 = 0.1094$$

e)Por último se pide $P[B|T \leq 3]$. Por el Teorema de Bayes

$$P[B|T \leq 3] = \frac{P[T \leq 3|B]P[B]}{P[T \leq 3]} = \frac{0.10565 \times 0.6}{0.1094} = 0.5793$$

Hay una probabilidad del 38.0 % que la batería defectuosa provenga del nuevo proveedor.