CPE (SEGUNDO CURSO)

PRÁCTICA 7 **SOLUCIONES** (**Curso 2023–2024**)

1.– Considérense las variables aleatorias independientes X e Y tales que

$$f_X(x) = 1, \quad x \in [0,1], \qquad f_Y(y) = 1/2, \quad y \in [0,2]$$

¿Cuál es la probabilidad de que, en una cierta observación simultánea de X e Y, la más pequeña de las dos sea menor que $1/2$?

———————SOLUCIÓN———————

Se tiene

$$\begin{aligned} P[\text{mín}(X,Y) \leq 1/2] &= 1 - P[\text{mín}(X,Y) > 1/2] \\ &= 1 - P[X > 1/2 \cap Y > 1/2] \overset{\text{indeptes.}}{=} 1 - P[X > 1/2]P[Y > 1/2] \\ &= 1 - \int_{1/2}^{\infty} f_X(x)\,dx \int_{1/2}^{\infty} f_Y(y)\,dy = 1 - \int_{1/2}^{1} 1\,dx \int_{1/2}^{2} 1/2\,dy = 5/8. \end{aligned}$$

2.– Un sistema de detección emplea equipos de vídeo de alta tecnología con el fin de detectar los automóviles que no pagan en una estación automática de peaje de una autopista. Se ha creado un prototipo del sistema, que se está empleando en una estación determinada. El sistema se ha diseñado para detectar a los infractores con una probabilidad del 90 % (es decir, un rendimiento teórico del 90 %).

Sin embargo, se supone que esta probabilidad variará con las condiciones meteorológicas bajo las que actúe el sistema. Por lo tanto, se ha diseñado el prototipo para que registre automáticamente el clima cada vez que detecta un infractor. Tras una serie de pruebas controladas, realizadas bajo diferentes situaciones meteorológicas, se dispone de la siguiente información: en los casos en que el vehículo infractor fue detectado por el sistema, el clima estuvo despejado el 75 % de las veces, nublado el 20 % y lluvioso el 5 %. Cuando el sistema no detectó al infractor, el clima estuvo despejado el 60 % de las veces, nublado el 30 % y lluvioso el 10 %. A la vista de estos datos, ¿cuál es el rendimiento del sistema en las diferentes condiciones meteorológicas? ¿Es muy lluviosa la zona de ensayo?

———————SOLUCIÓN———————

Llamemos D al suceso ”el sistema detecta a un infractor”, y B, N y L a los sucesos ”el clima está despejado, nuboso y con lluvia”, respectivamente. Los datos que se nos proporcionan son:

$$P[D] = 0.9, \quad P[B|D] = 0.75, \quad P[N|D] = 0.2, \quad P[L|D] = 0.05$$

$$P[B|\overline{D}] = 0.6, \quad P[N|\overline{D}] = 0.3, \quad P[L|\overline{D}] = 0.1$$

Por tanto, aplicando el teorema de Bayes

$$P[D|L] = \frac{P[L|D]P[D]}{P[L|D]P[D] + P[L|\overline{D}]P[\overline{D}]}$$

Pero, obviamente, $P[\overline{D}] = 1 - P[D] = 0.1$. Luego

$$P[D|L] = \frac{0.05 \times 0.9}{0.05 \times 0.9 + 0.1 \times 0.1} = 0.818$$

Operando de la misma forma en los otros dos casos

$$P[D|R] = \frac{P[R|D]P[D]}{P[R|D]P[D] + P[R|\overline{D}]P[\overline{D}]} = \frac{0.2 \times 0.9}{0.2 \times 0.9 + 0.3 \times 0.1} = 0.857$$

$$P[D|B] = \frac{P[B|D]P[D]}{P[B|D]P[D] + P[B|\overline{D}]P[\overline{D}]} = \frac{0.75 \times 0.9}{0.75 \times 0.9 + 0.6 \times 0.1} = 0.9183$$

Luego el rendimiento real del sistema es del 92 %, 86 % y 82 % dependiendo que el tiempo sea despejado, nuboso o lluvioso, respectivamente.

Para saber si la zona es lluviosa debemos calcular $P[L]$. Aplicando el teorema de probabilidad total

$$P[L] = P[L|D]P[D] + P[L|\overline{D}]P[\overline{D}] = 0.055$$

Luego la zona es muy poco lluviosa (sólo llueve el 5.5 % del tiempo, es decir, 20 días al año))

3.– Calcular el coeficiente de correlación de X e Y si

$$f_{XY}(x, y) = x + y \qquad R_{X,Y} = [0, 1] \times [0, 1]$$

——————————SOLUCIÓN——————————

Basta aplicar la definición de ρ_{XY}

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

siendo

$$\sigma_X^2 = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - [E(X)]^2$$
$$\sigma_Y^2 = E[(Y - E(Y))^2] = E(Y^2) - [E(Y)]^2$$
$$\sigma_{XY} = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Calculamos las esperanzas de las variables aleatorias que intervienen en estas expresiones:

$$E(X) = \int\int_{R_{XY}} x f_{XY}(x, y) dx\, dy = \int_0^1 \int_0^1 x(x + y) dx\, dy = 7/12$$
$$E(Y) = \int\int_{R_{XY}} y f_{XY}(x, y) dx\, dy = \int_0^1 \int_0^1 y(x + y) dx\, dy = 7/12$$
$$E(X^2) = \int\int_{R_{XY}} x^2 f_{XY}(x, y) dx\, dy = \int_0^1 \int_0^1 x^2(x + y) dx\, dy = 5/12$$
$$E(Y^2) = \int\int_{R_{XY}} y^2 f_{XY}(x, y) dx\, dy = \int_0^1 \int_0^1 y^2(x + y) dx\, dy = 5/12$$
$$E(XY) = \int\int_{R_{XY}} xy f_{XY}(x, y) dx\, dy = \int_0^1 \int_0^1 xy(x + y) dx\, dy = 1/3$$

Se tiene así

$$\sigma_X^2 = \frac{5}{12} - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = \frac{11}{144}$$

y análogamente $\sigma_Y^2 = 11/144$, mientras que

$$\sigma_{XY} = \frac{1}{3} - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = -\frac{1}{144}$$

de donde

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = -\frac{1}{11}$$

4.– El sistema de propulsión de un avión comercial consta de cuatro turbinas que funcionan de manera independiente. Se pide calcular la distribución de la vida del sistema en los siguientes casos:

a) El sistema puede funcionar aunque una de las turbinas deje de funcionar.

b) El sistema puede funcionar siempre y cuando no fallen las dos turbinas del mismo lado.

c) Calcular y comparar la esperanza matemática de cada caso.

Supóngase que X, tiempo de vida de una turbina, es una variable exponencialmente distribuida con parámetro $\lambda = 1/E[X]$.

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad x \geq 0$$

Nota: recuérdese que $\int_0^\infty tn\lambda e^{-n\lambda t} dt = \frac{1}{n\lambda}$

SOLUCIÓN

Llamaremos D_1 y D_2 al tiempo de vida de cada turbina del ala derecha.

Llamaremos T_1 y T_2 al tiempo de vida de cada turbina del ala izquierda.

a) Llamaremos V al tiempo de vida del conjunto del sistema de propulsión.

En este caso el sistema funcionará siempre y cuando falle como máximo una turbina, y por tanto V será el segundo mínimo de D_1, D_2, T_1, T_2, porque el sistema puede funcionar con una turbina averiada. Razonando como siempre

$$\begin{aligned} P[V > v] = P\Big[&\{(D_1 > v) \cap (D_2 > v) \cap (T_1 > v) \cap (T_2 > v)\} \cup \\ &\cup \{(D_1 \leq v) \cap (D_2 > v) \cap (T_1 > v) \cap (T_2 > v)\} \cup \\ &\cup \{(D_1 > v) \cap (D_2 \leq v) \cap (T_1 > v) \cap (T_2 > v)\} \cup \\ &\cup \{(D_1 > v) \cap (D_2 > v) \cap (T_1 \leq v) \cap (T_2 > v)\} \cup \\ &\cup \{(D_1 > v) \cap (D_2 > v) \cap (T_1 > v) \cap (T_2 \leq v)\}\Big] \end{aligned}$$

Considerando independencias e incompatibilidades

$$P[V > v] = 1 - F_V(v) = e^{-4\lambda v} + 4(1 - e^{-\lambda v})e^{-3\lambda v} = 4e^{-3\lambda v} - 3e^{-4\lambda v}$$

luego

$$F_V(v) = 1 - 4e^{-3\lambda v} + 3e^{-4\lambda v}, \quad v \geq 0$$

b) Llamaremos Y al tiempo de vida del conjunto del sistema de propulsión.

En este caso el sistema funcionará siempre y cuando no fallen las dos turbinas del mismo lado. Llamemos A a la vida útil de las turbinas del ala izquierda y B a la vida útil de las turbinas del ala derecha. Donde $A = max\{D_1, D_2\}$ y $B = max\{T_1, T_2\}$

$$F_A(a) = P[A \leq a] = P\Big[(D_1 \leq a) \cap (D_2 \leq a)\Big] = F_{D_1}(a)F_{D_2}(a) = (1 - e^{-\lambda a})^2$$

$$F_B(b) = P[B \leq b] = P\Big[(T_1 \leq b) \cap (T_2 \leq b)\Big] = F_{T_1}(b)F_{T_2}(b) = (1 - e^{-\lambda b})^2$$

Por tanto la distribución de la vida del sistema será:

$$F_Y(y) = P\Big[(A \leq y) \cup (B \leq y)\Big] = P[A \leq y] + P[B \leq y] - P\Big[(A \leq y) \cap (B \leq y)\Big] =$$

$$= (1 - e^{-\lambda y})^2 + (1 - e^{-\lambda y})^2 - (1 - e^{-\lambda y})^4 = -e^{-4\lambda y} + 4e^{-3\lambda y} - 4e^{-2\lambda y} + 1$$

c) Esperanza matemática de ambos sistemas

$$E[V] = \int_{R_V} v \ f_V(v) \ dv$$

$$f_V(v) = 12\lambda e^{-3\lambda v} - 12\lambda e^{-4\lambda v}$$

Por tanto,

$$E[V] = \int_0^\infty v \ \Big(12\lambda e^{-3\lambda v} - 12\lambda e^{-4\lambda v}\Big) \ dv =$$

$$= 4\int_0^\infty 3\lambda v e^{-3\lambda v} \ dv - 3\int_0^\infty 4\lambda v e^{-4\lambda v} \ dv = \frac{4}{3\lambda} - \frac{3}{4\lambda} = \frac{7}{12\lambda}$$

Para el segundo sistema

$$f_Y(y) = 4e^{-4\lambda y} - 12e^{-3\lambda y} + 8e^{-2\lambda y}$$

Por tanto,

$$E[Y] = \int_0^\infty y \ \Big(4e^{-4\lambda y} - 12e^{-3\lambda y} + 8e^{-2\lambda y}\Big) \ dy =$$

$$= \int_0^\infty 4\lambda y e^{-4\lambda y} \ dy - 4\int_0^\infty 3\lambda y e^{-3\lambda y} \ dy + 4\int_0^\infty 2\lambda y e^{-2\lambda y} \ dy =$$

$$= \frac{1}{4\lambda} - \frac{4}{3\lambda} + \frac{4}{2\lambda} = \frac{11}{12\lambda}$$

5.– Un tipo de máquina tiene probabilidad 2/3 de ser operativa durante 100 unidades de tiempo; alcanzado este límite de tiempo, la máquina se desecha y diremos que su duración T es de 100 unidades de tiempo. Si una máquina no alcanza el valor de 100, la probabilidad de que su duración T se halle en el intervalo (t_1, t_2) viene dada por:

$$P[t_1 \leq T \leq t_2] = \int_{t_1}^{t_2} \alpha(t)dt \quad con \;\; \alpha(t) = At^2(100-t)^2, \quad 0 \leq t_1 \leq t \leq t_2 < 100$$

Se pide:

a) Hallar el valor de A y la función de distribución acumulada de T.

b) Hallar la probabilidad de que una máquina no alcance la duración de 100 habiendo superado la duración de 50.

——————SOLUCIÓN——————

a) Sabemos que $P[t_1 \leq T \leq t_2] = F_T(t_2) - F_T(t_1)$. Luego $\alpha(t) = f_T(t)$. La variable T es una variable mixta, ya que $P[T = 100] = P_T(100) = 2/3$. Por tanto, la integral de la función de densidad en el rango continuo ha de valer 1/3. Es decir

$$\int_0^{100} f_T(t)dt = \int_0^{100} \alpha(t)dt = \int_0^{100} At^2(100-t)^2 dt = \frac{10^{10}A}{30}$$

Consecuentemente $A = 10^{-9}$. Por tanto, la distribución de la variable T puede escribirse como

$f_T(t) = 10^{-9}t^2(100-t)^2, \quad t \in [0, 100)$

$P_T(t) = 2/3, \quad t = 100$

Sin más que integrar obtenemos la función de distribución acumulada que vale:

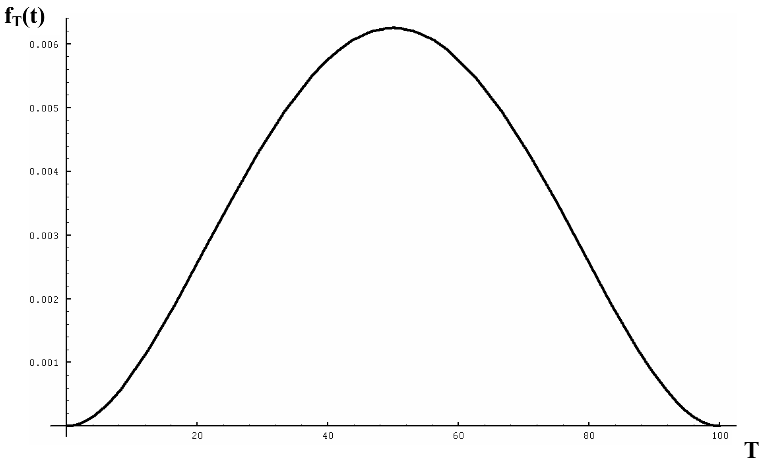
$$F_T(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 10^{-9}\Big[\dfrac{10^4t^3}{3} - \dfrac{10^2t^4}{2} + \dfrac{t^5}{5}\Big] & 0 \leq t < 100 \\ 1 & t \geq 100 \end{cases}$$

b) Nos piden $P[T < 100|T > 50]$. Por definición

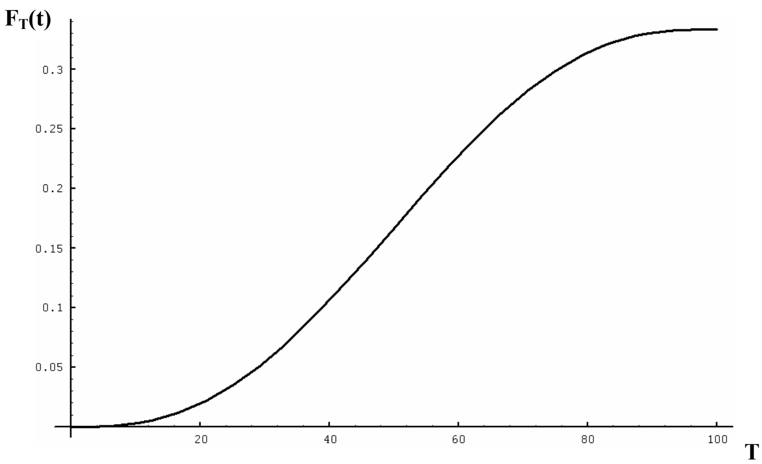
$$P[T < 100|T > 50] = \frac{P[T < 100 \cap T > 50]}{P[T > 50]} = \frac{P[50 < T < 100]}{1 - F_T(50)} = \frac{1/3 - 1/6}{1 - 1/6}$$

ya que $F_T(50) = 1/6$. Consecuentemente, $P[T < 100|T > 50] = 1/5$

A continuación se representan la función de densidad y la función de distribución acumulada de la parte continua de esta variable.



fT(t)
0.006
0.005
0.004
0.003
0.002
0.001
20
40
60
80
100
T



FT(t)
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
20
40
60
80
100
T