CPE (SEGUNDO CURSO)

PRÁCTICA 7 **SOLUCIONES** (**Curso 2024–2025**)

1.– El número de errores que se producen por cada 100 líneas de código en un programa en lenguaje FORTRAN puede representarse por una variable aleatoria discreta X con las siguientes probabilidades:

$P_X(2) = 0.01$, $P_X(3) = 0.25$, $P_X(4) = 0.40$, $P_X(5) = 0.30$, $P_X(6) = 0.04$

Al traducir el código de FORTRAN a C++ el número de errores del nuevo código será una nueva variable aleatoria Z que se sabe depende linealmente de la variable X según $Z = 3X - 2$. Calcular la media de errores en el programa en C++ y su varianza.

———————SOLUCIÓN———————

Dado que la esperanza matemática es un operador lineal, tiene sus mismas propiedades, por tanto sabemos que:

$$E[aX + b] = aE[X] + b$$

Por tanto, la esperanza de la variable Z será:

$$E[Z] = E[3X - 2] = 3E[X] - 2$$

La esperanza de la variable X discreta es simplemente:

$$E[X] = \sum_{R_X} xP_X[x] = 2 \cdot 0.01 + 3 \cdot 0.25 + 4 \cdot 0.4 + 5 \cdot 0.3 + 6 \cdot 0.04 = 4.11$$

Por tanto:

$$E[Z] = 10.33$$

El cálculo de la varianza se puede abordar de la misma forma teniendo en cuenta la propiedad:

$$Var[aX + b] = a^2 Var[X] \Rightarrow Var[Z] = Var[3X - 2] = 3^2 Var[X]$$

Por lo tanto necesitaremos la varianza de la variable X que calcularemos como:

$$Var[X] = E[X^2] - E^2[x] = 2^2 \cdot 0.01 + 3^2 \cdot 0.25 + 4^2 \cdot 0.4 + 5^2 \cdot 0.3 + 6^2 \cdot 0.04 - 4.11^2 = 0.7379$$

$$Var[Z] = 9 \cdot 0.7379 = 6.6411$$

———

2.– El error cometido en la fabricación de una determinada pieza de longitud fija L está distribuido según la siguiente función de densidad.

$$f_X(x) = k\left(1 - x^2\right) \quad -1 \leq x \leq 1$$

donde k es una constante. Se pide:

(a) Calcular la esperanza y la desviación típica del error cometido en una pieza.

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que en una determinada pieza la longitud difiera en más de 0.5 unidades de L?

(c) Si se toman 10 piezas, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 2 piezas tengan un error mayor de 0.5 unidades?

———————SOLUCIÓN———————

Para que f_X sea una función de densidad válida, el parámetro k ha de tomar el valor tal que:

$$\int_{-1}^{1} k\left(1 - x^2\right)\, dx = 1 \Rightarrow k = \frac{3}{4}$$

a)

$$E[X] = \int_{R_X} x f_X(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{3}{4} x\left(1 - x^2\right)\mathrm{d}x = 0$$

$$Var[X] = \int_{R_X} (x - E[X])^2 f_X(x) dx = \int_{-1}^{1} (x-0)^2 \left(\frac{3}{4}\left(1 - x^2\right)\right) dx = \frac{1}{5}$$

Por lo tanto la desviación típica será

$$\sigma_X = \sqrt{Var[X]} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

b) En este apartado se pide calcular la siguiente probabilidad

$$P[|X| > 0.5] = 1 - P[|X| \leq 0.5] = 1 - P[-0.5 \leq X \leq 0.5] = 1 - \int_{-0.5}^{0.5} f_X(x)\mathrm{d}x =$$

$$= 1 - \int_{-0.5}^{0.5} \frac{3}{4}\left(1 - x^2\right)\mathrm{d}x = 0.3125$$

c) Sea N la variable aleatoria "Número de piezas con error mayor a 0.5 unidades al medir 10 piezas". Obviamente, esta variable aleatoria es una binomial $N \equiv B(10, 0.3125)$. En este apartado se nos pide determinar la siguiente probabilidad

$$P[N \geq 2] = 1 - P[N < 2] = 1 - (P[N = 1] + P[N = 0])$$

$$P[N = 0] = \binom{10}{0} P[|X| > 0.5]^0 P[|X| < 0.5]^{10-0} = (1 - 0.3125)^{10} = 0.0236$$

$$P[N = 1] = \binom{10}{1} P[|X| > 0.5]^1 P[|X| < 0.5]^{10-1} = 10 \cdot 0.3125\,(1 - 0.3125)^9 = 0.1072$$

$$P[N \geq 2] = 1 - (0.1072 + 0.0236) = 0.8692$$

3.– Un pequeño inversor ha decidido depositar sus ahorros en un determinado banco. Le ofrecen dos fondos de inversión con diferente nivel de volatilidad: el fondo A tiene una volatilidad (varianza de la rentabilidad) mayor que el fondo B.

Después de analizar los dos productos el inversor descubrió que las rentabilidades asociadas a cada producto, X e Y, se pueden considerar como variables aleatorias normalmente distribuidas con una rentabilidad media del 10 % en los dos casos y una desviación típica del 2 % para el fondo A y del 1 % para el fondo B.

Adicionalmente, descubrió que ambos fondos de inversión tienen activos comunes, y por lo tanto las rentabilidades asociadas no son independientes, siendo el coeficiente de correlación $\rho_{XY} = 0.5$.

Definiendo la rentabilidad total, Z, como $Z = \alpha X + (1-\alpha)Y$. Se pide:

a) Calcular cómo debe realizar el analista su inversión (es decir, el valor α en la expresión anterior) para que la volatilidad (varianza de la rentabilidad total) asociada sea mínima.

b) Calcular la rentabilidad total esperada.

SOLUCIÓN

a)

La volatilidad asociada vendrá dada por la varianza de la rentabilidad total, esto es

$$Var[Z] = Var[\alpha X + (1-\alpha)Y] = \alpha^2 Var[X] + (1-\alpha)^2 Var[Y] + 2COV[\alpha X(1-\alpha)Y].$$

Dado que las rentabilidades no son independientes la covarianza será distinta de cero.

$$COV[\alpha X(1-\alpha)Y] = E[\alpha X(1-\alpha)Y] - E[\alpha X]E[(1-\alpha)Y] =$$

$$= \alpha(1-\alpha)\left(E[XY] - E[X]E[Y]\right) = \alpha(1-\alpha)COV[X,Y]$$

Adicionalmente, el coeficiente de correlación entre X e Y se define como

$$\rho_{xy} = \frac{COV[X,Y]}{\sigma_x \sigma_y}$$

de donde despejamos la $COV[X,Y]$:

$$COV[X,Y] = \sigma_x \sigma_y \rho_{xy}$$

Y por lo tanto,

$$Var[Z] = \alpha^2 Var[X] + (1-\alpha)^2 Var[Y] + 2\alpha(1-\alpha)COV[X,Y] =$$

$$= \alpha^2 \sigma_x^2 + (1-\alpha)^2 \sigma_y^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_x \sigma_y \rho_{xy}$$

Una vez obtenida la expresión de la varianza es necesario calcular el valor de α que hace que sea mínima. Por lo tanto,

$$\frac{\partial Var[Z]}{\partial \alpha} = 2\alpha\sigma_x^2 - 2(1-\alpha)\sigma_y^2 + 2(1-2\alpha)\sigma_x \sigma_y \rho_{xy} = 0$$

Despejando α obtenemos:

$$\alpha = \frac{2\sigma_y^2 - 2\sigma_x\sigma_y\rho_{xy}}{2\sigma_x^2 + 2\sigma_y^2 - 4\sigma_x\sigma_y\rho_{xy}}$$

Finalmente, introduciendo los datos aportados por el enunciado se obtiene:

$$\alpha = 0$$

Es decir, el inversor debe comprar el 100.0 % del fondo B.

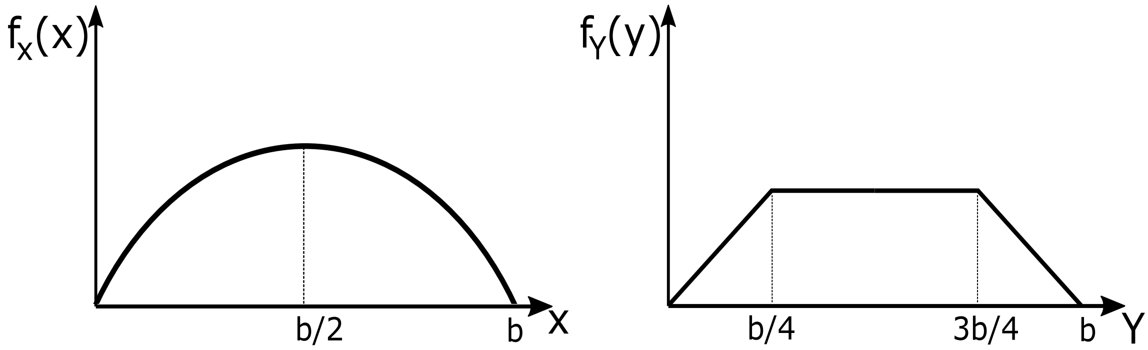
Este valor de α lleva asociada una volatilidad de $Var[Z] = 1.245$.

b) La esperanza matemática vale:

$$E[Z] = E[\alpha X + (1-\alpha)Y] = \alpha E[X] + (1-\alpha)E[Y] = \alpha m_x + (1-\alpha)m_y = 10\,\%$$

como era obvio ya que los dos fondos tienen la misma rentabilidad media.

4.– Se sabe que las variables aleatorias X e Y tienen como función de densidad la siguiente figura:



Se pide:

a) Calcular la esperanza matemática de X, Y y $Z = X + Y$.

NOTA: La función de densidad de X es una parábola.

——————————SOLUCIÓN——————————

a) Dada la simetría en la función de densidad es directo determinar que

$$E[X] = E[Y] = b/2$$

Como $Z = X + Y$

$$E[Z] = E[X] + E[Y] = b/2 + b/2 = b$$

5.– Un fabricante vende cajas de componentes electrónicos. Para conocer el nivel de calidad de cada caja se efectúa la siguiente comprobación: se toman 10 componentes de cada caja y si todos son aceptables la caja se vende; en caso contrario la caja se rechaza. Si una caja se vende, el beneficio es de 900 € y si se rechaza las pérdidas son de 600 €. Si la probabilidad de que un componente sea defectuoso es de 0.05, calcúlese la esperanza matemática del beneficio por caja

——————————SOLUCIÓN——————————

Sea R el suceso "la caja se rechaza" y sea A el suceso "la caja se acepta". Si la probabilidad de que un componente sea defectuoso es p, y si suponemos que los 10 componentes se eligen independientemente, es obvio que

$$P[A] = (1-p)^{10} \quad \text{y por tanto } P[R] = 1 - (1-p)^{10}$$

Sea B el beneficio que se obtiene con cada caja. Sabemos que

$$E[B|A] = 900 \;\text{ y } E[B|R] = -600$$

Luego

$$E[B] = E[B|A]P[A] + E[B|R]P[R] = 900P[A] - 600P[R] = 900(1-p)^{10} - 600\big[1 - (1-p)^{10}\big] =$$

$$= 1500(1-p)^{10} - 600$$

Como en nuestro caso $p = 0.05$ resulta

$$E[B] = 298,105 \text{ €}$$