CPE (SEGUNDO CURSO)

PRÁCTICA 6 **SOLUCIONES** (**Curso 2023–2024**)

1.– El error cometido en la fabricación de una determinada pieza de longitud fija L está distribuido según la siguiente función de densidad.

$$f_X(x) = k\left(1 - x^2\right) \quad -1 \leq x \leq 1$$

donde k es una constante. Se pide:

(a) Calcular la esperanza y la desviación típica del error cometido en una pieza.

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que en una determinada pieza la longitud difiera en más de 0.5 unidades de L?

(c) Si se toman 10 piezas, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 2 piezas tengan un error mayor de 0.5 unidades?

———————SOLUCIÓN———————

Para que f_X sea una función de densidad válida, el parámetro k ha de tomar el valor tal que:

$$\int_{-1}^{1} k\left(1 - x^2\right) dx = 1 \Rightarrow k = \frac{3}{4}$$

a)

$$E[X] = \int_{R_X} x f_X(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{3}{4} x\left(1 - x^2\right)\mathrm{d}x = 0$$

$$Var[X] = \int_{R_X} (x - E[X])^2 f_X(x) dx = \int_{-1}^{1} (x-0)^2 \left(\frac{3}{4}\left(1 - x^2\right)\right) dx = \frac{1}{5}$$

Por lo tanto la desviación típica será

$$\sigma_X = \sqrt{Var[X]} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

b) En este apartado se pide calcular la siguiente probabilidad

$$P[|X| > 0.5] = 1 - P[|X| \leq 0.5] = 1 - P[-0.5 \leq X \leq 0.5] = 1 - \int_{-0.5}^{0.5} f_X(x)\mathrm{d}x =$$

$$= 1 - \int_{-0.5}^{0.5} \frac{3}{4}\left(1 - x^2\right)\mathrm{d}x = 0.3125$$

c) Sea N la variable aleatoria "Número de piezas con error mayor a 0.5 unidades al medir 10 piezas". Obviamente, esta variable aleatoria es una binomial $N \equiv B(10, 0.3125)$. En este apartado se nos pide determinar la siguiente probabilidad

$$P[N \geq 2] = 1 - P[N < 2] = 1 - (P[N = 1] + P[N = 0])$$

$$P[N = 0] = \binom{10}{0} P[|X| > 0.5]^0 P[|X| < 0.5]^{10-0} = (1 - 0.3125)^{10} = 0.0236$$

$$P[N = 1] = \binom{10}{1} P[|X| > 0.5]^1 P[|X| < 0.5]^{10-1} = 10 \cdot 0.3125\,(1 - 0.3125)^9 = 0.1072$$

$$P[N \geq 2] = 1 - (0.1072 + 0.0236) = 0.8692$$

2.– En la fabricación de componentes electrónicos una empresa emplea tres equipos que se consideran que trabajan de manera independiente. El número de piezas defectuosas producidas por un equipo en un día pueden ser considerada en primera aproximación una variable aleatoria uniformemente distribuida entre 0 y 20 (para mayor simplificación, dicha variable se supondrá continua). ¿Cuál es la probabilidad de que, en un día cualquiera, uno de los equipos elabores más piezas defectuosas que los otros dos juntos? ¿Cuál es la probabilidad de que, en un día cualquiera, se cometan un total de más de 40 piezas defectuosas?

SOLUCIÓN

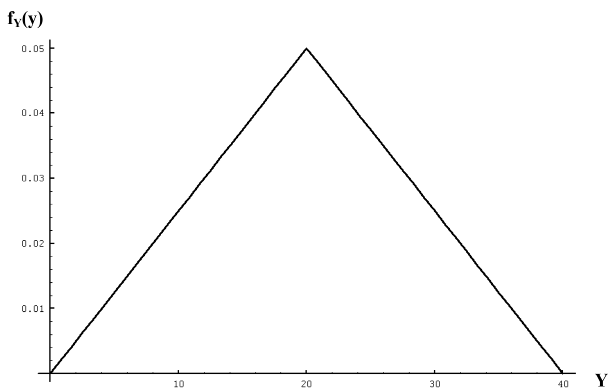
Sean X_1, X_2 y X_3 las piezas defectuosas fabricadas en un día. Sabemos que

$$f_{X_i}(x_i) = \frac{1}{20}, \quad R_{X_i} = [0, 20], \quad i = 1, 2, 3$$

a) Nos piden

$$P\big[X_1 > (X_2 + X_3) \cup X_2 > (X_1 + X_3) \cup X_3 > (X_1 + X_2)\big] = 3P\big[X_1 > (X_2 + X_3)\big]$$

por incompatibilidad y simetria. Sabemos que la distribución de $Y = X_2 + X_3$ es



Que se expresa

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{y}{400} & 0 \leq y < 20 \\ \dfrac{40 - y}{400} & 20 \leq y \leq 40 \end{cases}$$

Lo que nos piden puede escribirse $P[X_1 - Y > 0]$. Llamemos $Z = X_1 - Y$. Obviamente $R_Z = [-40, 20]$. Como todas las variables son independientes

$$f_Z(z) = \int_{R_Y} f_{X_1}(z+y) f_Y(y) \mathrm{d}y$$

Para que la integral no sea nula

$0 \leq z + y \leq 20 \ \Rightarrow \ -z \leq y \leq 20 - z$

$0 \leq y \leq 40 \qquad \Rightarrow \qquad 0 \leq y \leq 40$

Por tanto

1.-) $-40 \leq z \leq -20$

$$f_Z(z) = \int_{-z}^{40} \frac{1}{20} \frac{(40-y)}{400} \mathrm{d}y = \frac{1}{20^3} \frac{(40+z)^2}{2}$$

2.-) $-20 \leq z \leq 0$

$$f_Z(z) = \int_{-z}^{20-z} f_{X_1}(z+y) f_Y(y) \mathrm{d}y = \int_{-z}^{20} \frac{1}{20} \frac{(y)}{400} \mathrm{d}y + \int_{20}^{20-z} \frac{1}{20} \frac{(40-y)}{400} \mathrm{d}y =$$

$$= \frac{1}{20} - \frac{1}{2 \times 20^3} \left[z^2 + (20+z)^2 \right]$$

3.-) $0 \leq z \leq 20$

$$f_Z(z) = \int_{0}^{20-z} \frac{1}{20} \frac{y}{400} \mathrm{d}y = \frac{1}{20^3} \frac{(20-z)^2}{2}$$

La probabilidad pedida es $3P[Z > 0]$. Pero

$$P[Z > 0] = \int_{0}^{20} \frac{1}{20^3} \frac{(20-z)^2}{2} \mathrm{d}z = \frac{1}{6}$$

Luego

$$P = \frac{1}{2}$$

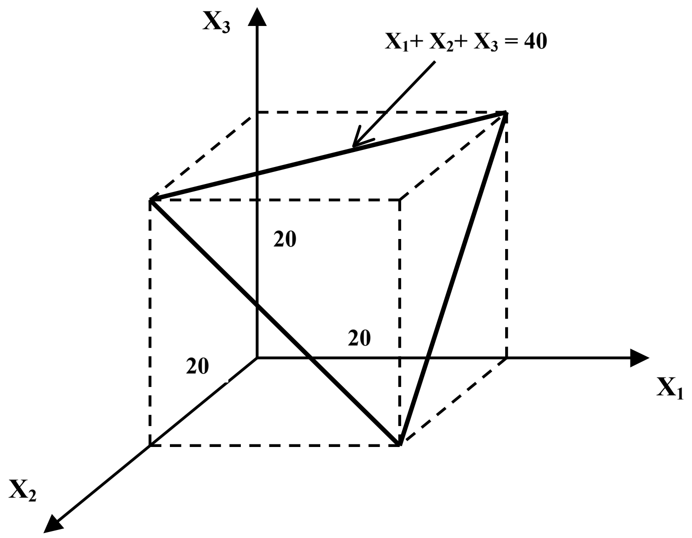
b) Como los equipos trabajan independientemente unos de otros

$$f_{X_1,X_2,X_3}(x_1, x_2, x_3) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) f_{X_3}(x_3) = \frac{1}{20^3}$$

en el rango conjunto (producto de los rangos). Y la probabilidad que nos piden es

$$P = \int\int\int_{x_1+x_2+x_3>40} f_{X_1,X_2,X_3}(x_1, x_2, x_3) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 = \int\int\int_{x_1+x_2+x_3>40} \frac{1}{20^3} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3$$

Si representamos el rango conjunto,



Como la función de densidad conjunta es constante el el rango conjunto, la probabilidad pedida será el volumen señalado en la figura (el acotado inferiormente por el plano $X_1 + X_2 + X_3 = 40$) dividido por el volumen total del cubo. Por tanto

$$P = \frac{1}{6}$$

3.– Dos puntos se encuentran aleatoriamente situados, de forma equiprobable, en el segmento $[0, 1]$. Calcular la esperanza matemática y la varianza de la distancia entre ambos.

SOLUCIÓN

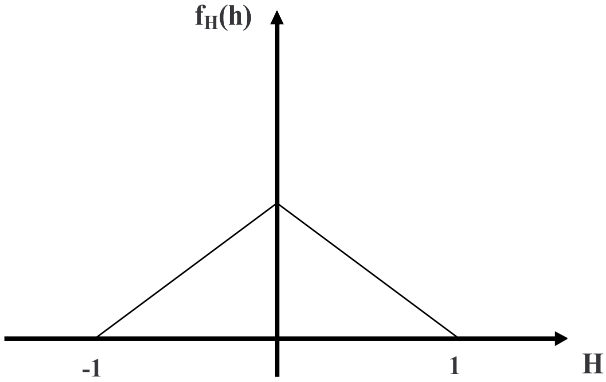
Sean X e Y la distancia de esos puntos al extremo izquierdo del segmento $[0, 1]$. Entonces, como la situación es al azar

$$f_X(x) = 1, \; x \in [0, 1]; \quad f_Y(y) = 1, \; y \in [0, 1]$$

La distancia entre esos dos puntos es

$$D = |X - Y| = |H| \text{ donde } H = X - Y \text{ y evidentemente } R_H = [-1, 1]$$

Como se sabe la distribución de la variable H es la siguiente



y se escribe

$$f_H(h) = \begin{cases} 1+h & -1 \leq h < 0 \\ 1-h & 0 \leq h < 1 \end{cases}$$

y cuya función de distribución acumulada es

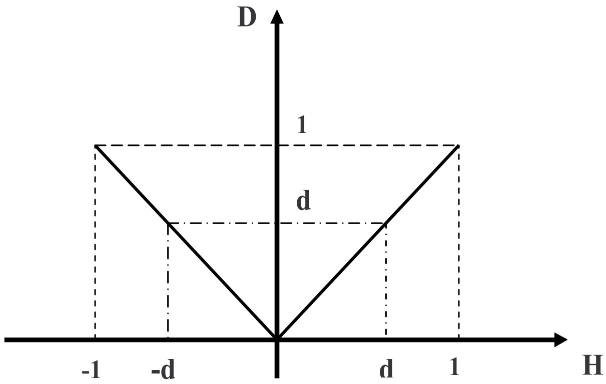
$$F_H(h) = \begin{cases} \dfrac{(1+h)^2}{2} & -1 \leq h < 0 \\ 1 - \dfrac{(1-h)^2}{2} & 0 \leq h < 1 \end{cases}$$

La relación $D = g(H)$ no es monótona (ver figura). Entonces, utilizando la función de distribución

$$F_D(d) = P[D \leq d] = P[-d \leq H \leq d] = F_H(d) - F_H(-d) = 1 - \frac{(1-h)^2}{2} - \frac{(1-h)^2}{2} =$$

$$= 1 - (1-d)^2, \quad 0 \leq d \leq 1$$

y se comprueba fácilmente que es una función de distribución acumulada adecuada.



Para calcular la función de densidad no tenemos más que derivar la función de distribución acumulada obtenida

$$f_D(d) = 2(1-d), \quad 0 \leq d \leq 1$$

La esperanza matemática de esta variable vale

$$E[D] = \int_0^1 2d(1-d)dd = \frac{1}{3}$$

por lo que la varianza será

$$Var[D] = \int_0^1 \left(d - \frac{1}{3}\right)^2 2(1-d)dd = \frac{1}{18}$$

4.– Una empresa ha calculado que las ventas y costes unitarios están relacionados con el Índice de Precios al Consumo (X) a través de las siguientes relaciones:

Costes : $C = (X + 2)/3$; Ventas : $V = (19 - X)/3$

El Índice de Precios al Consumo es una variable aleatoria con función de densidad lineal en x, rango $R_X = [1, 10]$ y tal que $f_X(1) = 2/99$.

a) Calcular las funciones de distribución acumulada de los costes, de las ventas y del beneficio relativo $((V - C)/C)$.

b) Calcular la probabilidad de que dicho beneficio sea negativo.

c) Calcular el beneficio medio y su desviación típica.

———————SOLUCIÓN———————

Claramente, con los datos suministrados, $f_X(x) = 2x/99, 1 \leq x \leq 10$, que efectivamente cumple las condiciones de una función de densidad. Por tanto

$$F_X(x) = \int_1^x \frac{2x}{99}dx = \frac{x^2-1}{99}$$

a) Las funciones de distribución acumulada se pueden calcular directamente:

$$F_C(c) = P[C \leq c] = P[(X+2)/3 \leq c] = P[X \leq 3c-2] = F_X(3c-2) = \frac{(3c-2)^2 - 1}{99} =$$

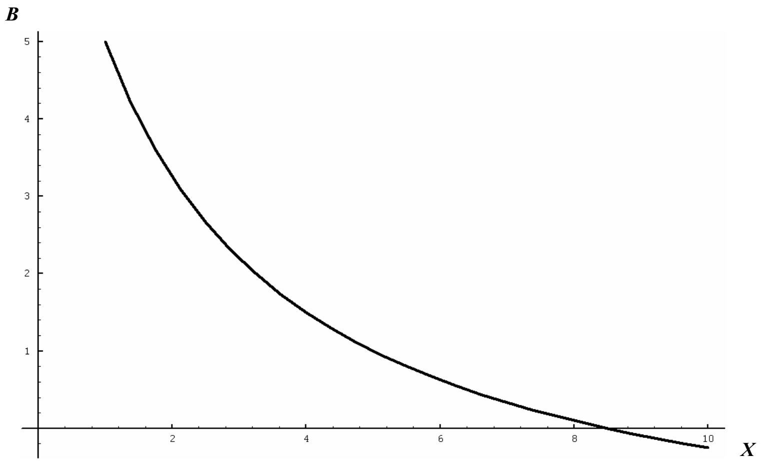
$$= \frac{c^2}{11} - \frac{4c}{33} + \frac{1}{33}, \quad 1 \leq c \leq 4$$

$$F_V(v) = P[V \leq v] = P[(19-X)/3 \leq v] = P[X \geq 19-3v] = 1-F_X(19-3v) = 1-\frac{(19-3v)^2-1}{99} =$$

$$= -\frac{v^2}{11} + \frac{38v}{33} - \frac{29}{11}, \quad 3 \leq v \leq 6$$

Es obvio comprobar que ambas funciones son de distribución acumulada.

El beneficio relativo Z es $Z = (V - C)/C = (17 - 2x)/(x + 2)$. El rango de Z es $R_Z = [-1/4, 5]$. La relación entre Z y X es en este caso



Y operando como antes

$$F_Z(z) = P[Z \leq z] = P\Big[\frac{17-2x}{x+2} \leq z\Big] = P\Big[X \geq \frac{17-2z}{2+z}\Big] = 1 - F_X\Big(\frac{17-2z}{2+z}\Big) =$$

$$= 1 - \frac{1}{99}\left(\Big(\frac{17-2z}{2+z}\Big)^2 - 1)\right), \quad -1/4 \leq z \leq 5$$

b)

$$P[Z \leq 0] = F_Z(0) = 0.28$$

c) En este caso es preferible calcular la media y la varianza directamente aunque las integrales resultantes no son sencillas. Derivando para calcular la función de densidad

$$f_Z(z) = \frac{1}{99}\left[\frac{2(17-2z)^2}{(2+z)^3} + \frac{4(17-2z)}{(2+z)^2}\right]$$

e integrando

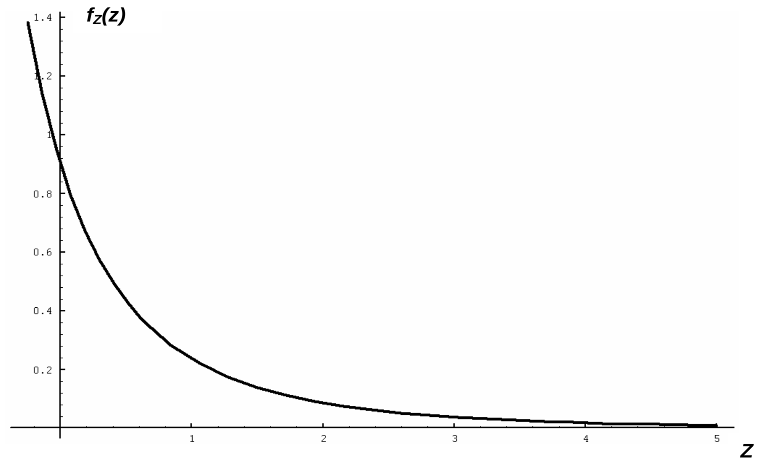
$$E[Z] = \int_{-1/4}^{5} z\frac{1}{99}\left[\frac{2(17-2z)^2}{(2+z)^3} + \frac{4(17-2z)}{(2+z)^2}\right]dz$$

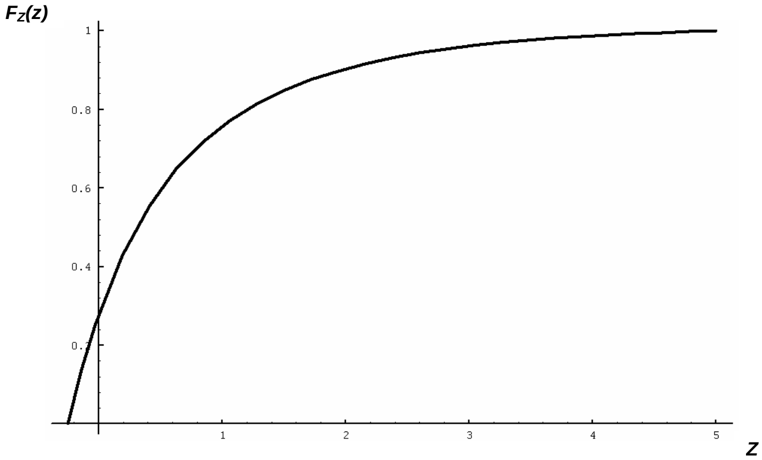
$$Var[Z] = \int_{-1/4}^{5} (z-m_z)^2\frac{1}{99}\left[\frac{2(17-2z)^2}{(2+z)^3} + \frac{4(17-2z)}{(2+z)^2}\right]dz$$

cuyo resultado es

$$E[Z] = 0.6419, \qquad Var[Z] = 0.9162, \qquad \sigma = 0.957$$

Como curiosidad se presentan las funciones de densidad y de distribución acumulada de esta variable





5.– Hay niebla y peligro de aludes en las dos vertientes de una montaña. Un montañero que quería subir y bajar dicha montaña ha desaparecido y se supone que la distancia horizontal, X, que puede haber recorrido desde el inicio de la ladera de ascenso (punto de salida) está entre 0 y 2 km. También se supone que la densidad de probabilidad de X es de la forma $f_X(x) = ax$. El perfil de la montaña que quería atravesar el montañero puede aproximarse, en una cierta escala, por

$h(x) = -x^2 + 2x$ si $0 \leq x < 1$

$h(x) = -x + 2$ si $1 \leq x \leq 2$

donde x representa la distancia horizontal. Para organizar su búsqueda, se pide:

a) Hallar la función de distribución acumulada y la densidad de probabilidad de X. Hallar la media y la mediana de X.

b) Hallar la esperanza de la cota en la que puede localizarse al montañero, que viene dada por $H = h(X)/4$.

c) Hallar la densidad de probabilidad de H.

d) Si ha de empezarse la búsqueda en lugares próximos a la moda de H, ¿dónde comenzará esta búsqueda?

SOLUCIÓN

a) Como el rango de X es $R_X = [0,2]$ habrá de verificarse

$$1 = \int_0^2 ax\mathrm{d}x \quad\Rightarrow\quad a = \frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad \boxed{f_X(x) = \frac{x}{2} \quad\Rightarrow\quad F_X(x) = \frac{x^2}{4}, \quad x \in [0,2]}$$

De forma inmediata se calcula

$$\boxed{E[X] = \frac{4}{3}; \quad \breve{m} = \sqrt{2}; \quad Var[X] = \frac{2}{9}; \quad \sigma = 0.4714}$$

b) Nos piden $E[H]$. Podemos calcularla de la siguiente forma

$$E[H] = \frac{1}{4}E[h(x)] = \frac{1}{4}\int_{R_X} h(x)f_X(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left[\int_0^1 (-x^2+2x)\frac{x}{2}\mathrm{d}x + \int_1^2 (-x+2)\frac{x}{2}\mathrm{d}x\right] =$$

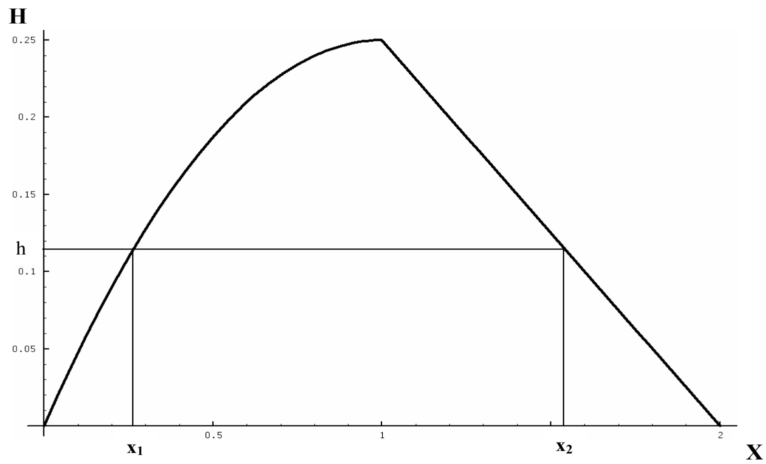
$$= \frac{1}{8}\left[\frac{5}{12} + \frac{2}{3}\right] = \frac{13}{96} = \boxed{0.1354}$$

c) La relación $H - X$ puede escribirse como

$H = \frac{-x^2+2x}{4}$ si $0 \le x < 1$

$H = \frac{-x+2}{4}$ si $1 \le x \le 2$

Obviamente $R_H = [0, 0.25]$. La primera expresión es creciente con X y la segunda decreciente, como puede observarse en la figura.



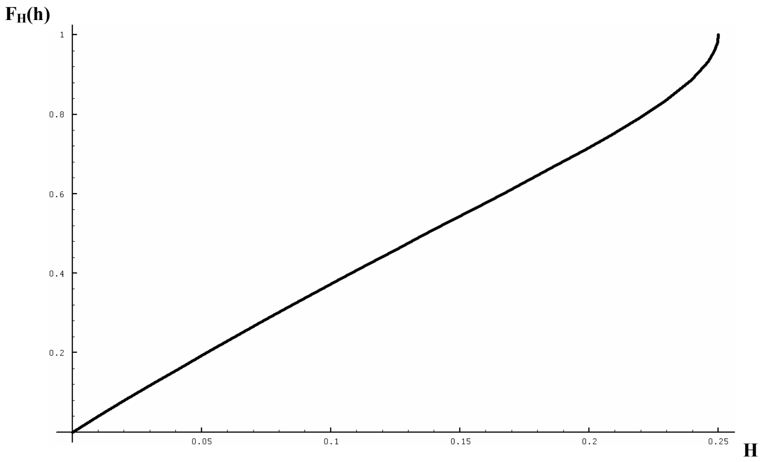
Como la relación $H - X$ no es monótona, calcularemos el comportamiento estadístico de H mediante el análisis de la función de distribución acumulada (ver figura anterior). En lo que sigue, para mantener la notación habitual, h es un valor particular de la v.a. H y no la función $h(x)$ antes definida.

$$P[H > h] = 1 - F_H(h) = P[x_1 \le X \le x_2] = F_X(x_2) - F_X(x_1)$$

De las relaciones anteriores obtenemos que $x_2 = 2 - 4h$ y $x_1 = 1 - \sqrt{1-4h}$. Por tanto

$$\boxed{F_H(h) = 1 - F_X(2-4h) + F_X(1-\sqrt{1-4h}) = \frac{1}{2} + 3h - 4h^2 - \frac{\sqrt{1-4h}}{2}, \quad h \in [0, 0.25]}$$

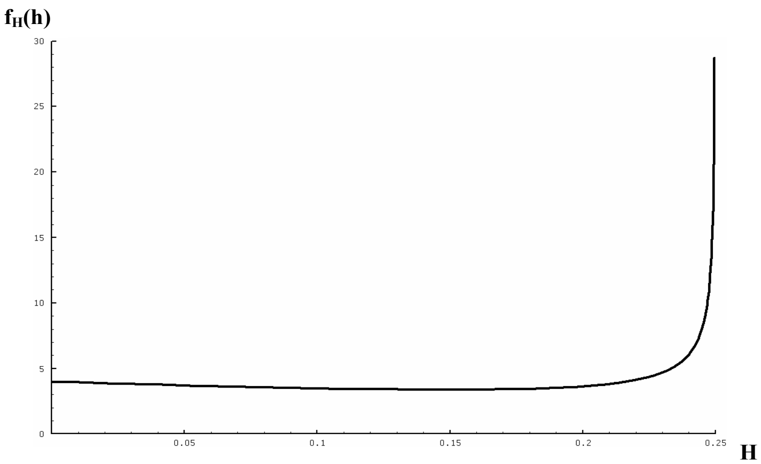
Esta función se representa en la siguiente figura.



La función de densidad de la variable H es

$$\boxed{f_H(h) = \frac{\mathrm{d}F_H(h)}{\mathrm{d}h} = 3 - 8h + \frac{1}{\sqrt{1-4h}}, \quad h \in [0, 0.25]}$$

función que puede verse en la siguiente figura



d) Si ha de empezarse la búsqueda en lugares próximos a la moda de H, es obvio, a la vista de la figura anterior, que habría que empezar en la cima de la montaña. (A la misma conclusión podría llegarse tras un estudio analítico).