# CPE (SEGUNDO CURSO)

**PRÁCTICA 6** **SOLUCIONES** (**Curso 2024–2025**)

**1.–** La función de densidad conjunta de las variables aleatorias continuas $X$, $Y$ y $Z$ es constante en el rango conjunto $R_{X,Y,Z} \equiv (x^2 + y^2 \leq 1) \times (0 \leq z \leq 4)$ (que representa un cilindro circular de radio 1 y altura 4). Calcular

a) $P[X^2 + Y^2 \leq 0.5]$

b) $P[X^2 + Y^2 \leq 0.5 \cap Z < 2]$

c) La función de probabilidad conjunta de $X$ e $Y$ si $Z = 1$

d) La distribución marginal de $X$

——————————SOLUCIÓN——————————

El volumen del cilindro (rango conjunto) es $V = \pi r^2 h = 4\pi$. Consecuentemente, si $f_{X,Y,Z}(x, y, z)$ es la función de densidad conjunta (constante), dado que se ha de verificar

$$\int_{R_{X,Y,Z}} f_{X,Y,Z}(x, y, z)dxdydz = 1$$

necesariamente $f_{X,Y,Z}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi}$

**a)** La probabilidad pedida es

$$P[X^2 + Y^2 \leq 0.5] = \int_A f_{X,Y,Z}(x, y, z)dxdydz = \frac{1}{4\pi}\int_A dxdydz = \frac{1}{4\pi}Vol[A]$$

donde $A$ es la parte del rango sobre la que queremos calcular la probabilidad y $Vol[A]$ su volumen. Pero $A$ es un cilindro circular de radio $r = \sqrt{0.5}$ y altura $h = 4$, luego $Vol[A] = \pi r^2 h = 2\pi$ Luego $P[X^2 + Y^2 \leq 0.5] = 1/2$

**b)** La probabilidad pedida en este caso es $P[X^2 + Y^2 \leq 0.5 \cap Z < 2]$, y su valor, razonando como en el apartado anterior, es claramente 1/4.

**c)** La función de densidad conjunta condicional de $X$ e $Y$ condicionadas a $Z$ es

$$f_{X,Y|Z}(x, y, z) = \frac{f_{X,Y,Z}(x, y, z)}{f_Z(z)}$$

La función de densidad marginal de $Z$ es, obviamente

$$f_Z(z) = \int_{R_{X,Y}} f_{X,Y,Z}(x, y, z)dxdy = \int_{(x^2+y^2)\leq 1} \frac{1}{4\pi}dxdy = \frac{\pi 1^2}{4\pi} = \frac{1}{4}, \quad R_Z = [0, 4]$$

que es obviamente una función de densidad correcta en el rango de $Z$. Por tanto

$$f_{X,Y|Z}(x, y, z) = \frac{f_{X,Y,Z}(x, y, z)}{f_Z(z)} = \frac{1/(4\pi)}{1/4} = \frac{1}{\pi}$$

expresión válida para todos los valores de $Z$ y que cumple, como ha de ser

$$\int_{R_{X,Y}} f_{X,Y|Z}(x,y,z)dxdy = 1$$

**d)** Vamos a calcular la función de densidad conjunta de $X$ e $Y$.

$$f_{X,Y}(x,y) = \int_{R_Z} f_{X,Y,Z}(x,y,z)dz = \int_0^4 \frac{1}{4\pi}dz = \frac{1}{\pi}, \quad R_{X,Y} \equiv (X^2+Y^2) \leq 1$$

y efectivamente es una función de densidad ya que

$$\int_{R_{X,Y}} f_{X,Y}(x,y)dxdy = \int_{R_{X,Y}} \frac{1}{\pi}dxdy = \frac{\pi 1^2}{\pi} = 1$$

Obsérvese que hemos obtenido que

$$f_{X,Y|Z}(x,y,z) = f_{X,Y}(x,y)$$

lo que implica que la variable $Z$ es independiente de las variables $X$ e $Y$ consideradas conjuntamente. Calculemos ahora, a partir de $f_{X,Y}(x,y)$ la marginal de $X$. Como sabemos $f_X(x) = \int_{R_Y} f_{X,Y}(x,y)dy$. Pero para cada valor $x$, el rango de $Y$ es

$$R_Y = [-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}]$$

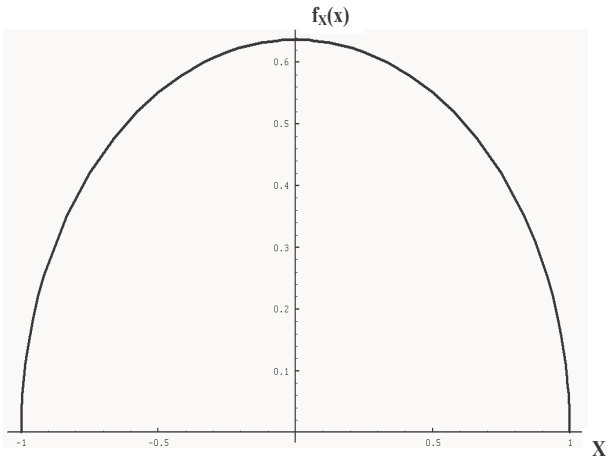
Luego

$$f_X(x) = \int_{R_Y} f_{X,Y}(x,y)dy = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi}dy = 2\frac{1}{\pi}\sqrt{1-x^2}, \quad R_X = [-1,1]$$

ya que el rango conjunto de $X$ e $Y$ es un círculo con radio unidad y centro el origen de coordenadas. Esta función es una función de densidad adecuada ya que

$$\int_{R_X} f(x)dx = \int_{-1}^{1} 2\frac{1}{\pi}\sqrt{1-x^2}dx = 2\frac{1}{\pi}\Big[\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{1}{2}arcsen(x)\Big]_{-1}^{1} = 2\frac{1}{\pi}\big[\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})\big] = 1$$

y se representa en la figura siguiente.



**2.**– La carga crítica mínima de pandeo para una viga biapoyada (carga de Euler) es, como se sabe, $P = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$. El producto $EI$ se considera constante pero, sin embargo, al fabricar la viga se comete un pequeño error en su longitud $L$, que puede considerarse una variable aleatoria distribuida entre $1-\epsilon$ y $1+\epsilon$ con función de densidad $f_X(x) = 1/2\epsilon$. ¿Cuál es la distribución de la carga crítica?

——————————SOLUCIÓN——————————

Nos dicen que $P = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$ siendo $P$ y $L$ variables aleatorias. La distribución de $L$ es $f_L(l) = \frac{1}{2\epsilon}, \quad 1-\epsilon \leq l \leq 1+\epsilon$.

Calculemos en primer lugar la distribución de $Z = L^2$. Como $L$ es una longitud, el error $\epsilon$ será tal que $0 \leq \epsilon < 1$. Como $Z = g(L)$ es monótona creciente

$$f_Z(z) = \frac{dl}{dz} f_L(l) = \frac{1}{2\sqrt{z}} f_L(l) = \frac{1}{2\sqrt{z}} \frac{1}{2\epsilon} = \frac{1}{4\epsilon\sqrt{z}}, \qquad (1-\epsilon)^2 \leq z \leq (1+\epsilon)^2$$

Y ahora debemos calcular la distribución de $P = \frac{\pi^2 EI}{Z}$. Esta función es decreciente $\forall z \in R_Z$. Por lo tanto

$$f_P(p) = \left|\frac{dz}{dp}\right| f_Z(z) = \frac{\pi^2 EI}{p^2} \frac{1}{4\epsilon\sqrt{z}} = \frac{\pi^2 EI}{p^2} \frac{1}{4\epsilon\sqrt{\frac{\pi^2 EI}{p}}} = \frac{\pi\sqrt{EIp}}{4\epsilon p^2}$$

Resumiendo

$$f_P(p) = \frac{\pi\sqrt{EIp}}{4\epsilon p^2}, \qquad \frac{\pi^2 EI}{(1+\epsilon)^2} \leq p \leq \frac{\pi^2 EI}{(1-\epsilon)^2}$$

y es sencillo comprobar que, efectivamente, se trata de una función de densidad correcta.

---

**3.**– Un constructor de vigas prefabricadas de hormigón armado, cansado de que una cierta empresa suministradora de barras de acero corrugado le suministre un 10 % de barras defectuosas, decide comprar una máquina para controlar la calidad de las barras antes de su aceptación. Si esta máquina da como defectuosas el 98 % de barras que realmente lo son, y el 1 % de las buenas, ¿cuál será el porcentaje de barras defectuosas aceptadas por el constructor?

——————————SOLUCIÓN——————————

Consideramos el experimento aleatorio consistente en escoger al azar una barra de las suministradas y comprobar si es o no defectuosa y si ha sido aceptada o no. Sea $A$ el suceso "la barra es aceptada" y $D$ el suceso "la barra es defectuosa". Por el enunciado del problema

$$P[D] = 0.1, \quad P[\overline{A}|D] = 0.98, \qquad P[\overline{A}|\overline{D}] = 0.01$$

Nos preguntan el porcentaje de barras defectuosas que habrá entre las barras aceptadas por la máquina. Por el teorema de Bayes

$$P[D|A] = \frac{P[A|D]\,P[D]}{P[A|D]\,P[D] + P[A|\overline{D}]\,P[\overline{D}]} = \frac{0.02 \cdot 0.1}{0.02 \cdot 0.1 + 0.99 \cdot 0.9} = 0.00224$$

El porcentaje pedido es por lo tanto el 0.224 %.

---

**4.**– Considérese una variable aleatoria $X$ uniformemente distribuida entre -1 y 1, y sea $Y$ la inversa de dicha variable. Calcular

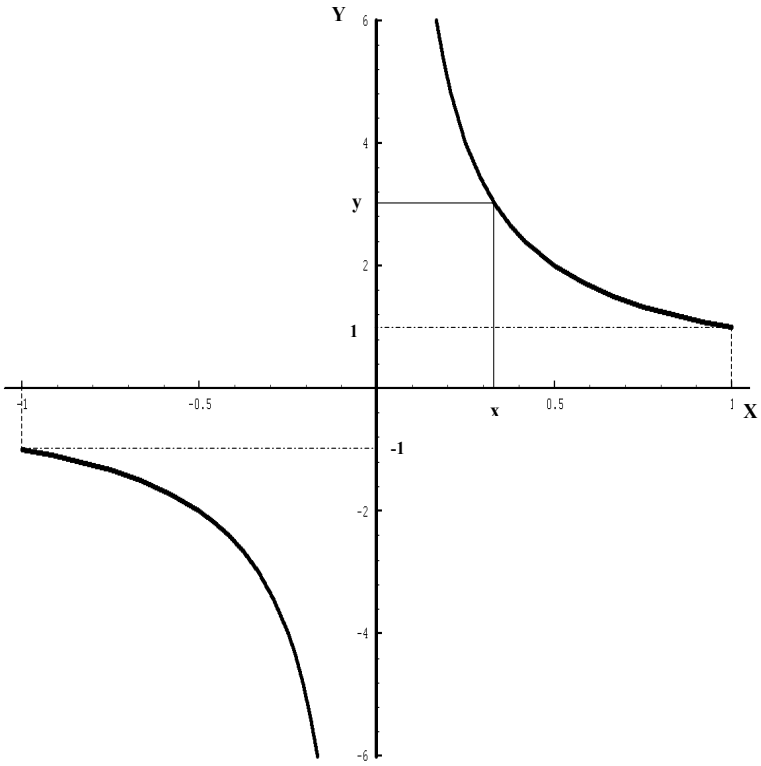
a) La distribución de $Y$.

b) La probabilidad de que $Y$ sea menor de 0.75.

c) La esperanza matemática de $Y$.

SOLUCIÓN

La función de densidad de $X$ es $f_X(x) = \frac{1}{2}, \quad -1 \leq x \leq 1$, y por tanto $F_X(x) = \frac{1+x}{2}$. Sea $Y = \frac{1}{X}$. El rango de $Y$ será $R_Y = (-\infty, -1] + [1, \infty)$. La relación $X - Y$ puede verse en la siguiente figura




**a)** Calculemos la función de distribución acumulada para distintos valores de $Y$

**1.-** $y \leq -1$

$$F_Y(y) = P[Y \leq y] = P[\frac{1}{y} \leq X \leq 0] = F_X(0) - F_X(\frac{1}{y}) = -\frac{1}{2y}$$

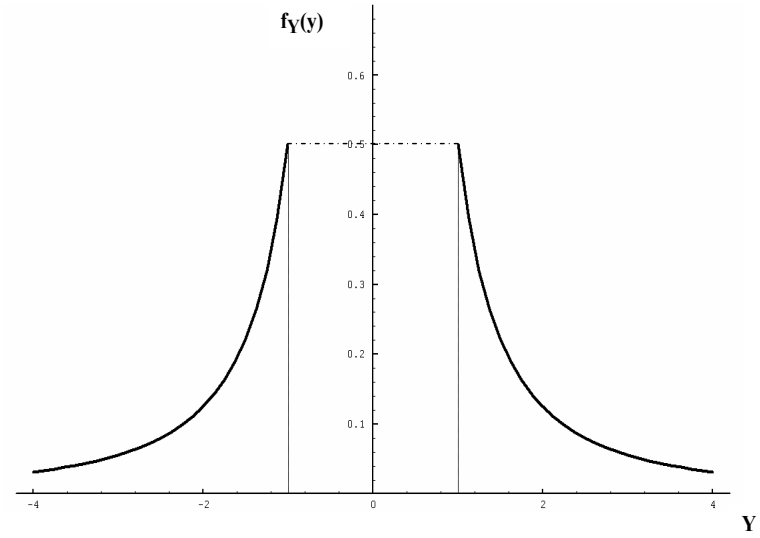
**2.-** $y \geq 1$

$$F_Y(y) = P[Y \leq y] = \frac{1}{2} + P[\frac{1}{y} \leq X \leq 1] = \frac{1}{2} + F_X(1) - F_X(\frac{1}{y}) = 1 - \frac{1}{2y}$$

La función de densidad es, para todo el rango

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{1}{2y^2}, \quad R_Y = (-\infty, -1] + [1, \infty)$$

cuya gráfica puede verse en la siguiente figura, siendo inmediato comprobar que efectivamente reune las condiciones para ser una función de densidad.




**b)** Obviamente $P[Y < 0.75] = P[Y \leq 0] = \frac{1}{2}$

**c)** Y la esperanza matemática de $Y$ es

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{-1} y f_Y(y) dy + \int_{1}^{\infty} y f_Y(y)$$

Pero esta integral no es uniformemente convergente, ya que

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{|y|}{2y^2} dy + \int_{1}^{\infty} \frac{|y|}{2y^2} dy = \infty$$

y por lo tanto la esperanza matemática no existe.

---

**5.–** Una máquina tiene seis componentes iguales y puede funcionar con uno de ellos fuera de servicio. La llegada de averías a cada componente es una variable aleatoria con la función de distribución acumulada $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad x \geq 0$ . Todos los componentes son independientes y no son reparables. Calcular el tiempo de vida útil de la máquina.

——————————SOLUCIÓN——————————

La máquina puede funcionar con cinco componentes, así que no se detendrá hasta que se estropee el segundo. Luego debemos calcular el tiempo hasta que se estropee el segundo componente (es decir, el segundo tiempo en el que llega una avería). Sea $T$ el tiempo de funcionamiento de la máquina, y $X_i$ el tiempo de funcionamiento de cada componente. Sabemos que $X_i \equiv EX[\lambda]$.

Si $T$ es el segundo mínimo, para que $T$ sea mayor que un cierto valor $t$, todas las variables $X_i$ menos como mucho una han de ser superiores a ese valor $t$. Por tanto, dado que dichas variables son iid,

$$P[T > t] = P[(X_1 > t) \cap (X_2 > t) \cap (X_3 > t) \cap ... \cap (X_6 > t) \cup$$

$$\cup(X_1 \leq t) \cap (X_2 > t) \cap (X_3 > t) \cap ... \cap (X_6 > t) \cup$$
$$\cup(X_1 > t) \cap (X_2 \leq t) \cap (X_3 > t) \cap ... \cap (X_6 > t) \cup \ldots$$
$$\ldots \cup (X_1 > t) \cap (X_2 > t) \cap (X_3 > t) \cap ... \cap (X_6 \leq t)]$$

y por tanto, teniendo en cuenta la incompatibilidad de los sucesos

$$P[T > t] = (1 - F_X(t))^6 + 6F_X(t)(1 - F_X(t))^5$$

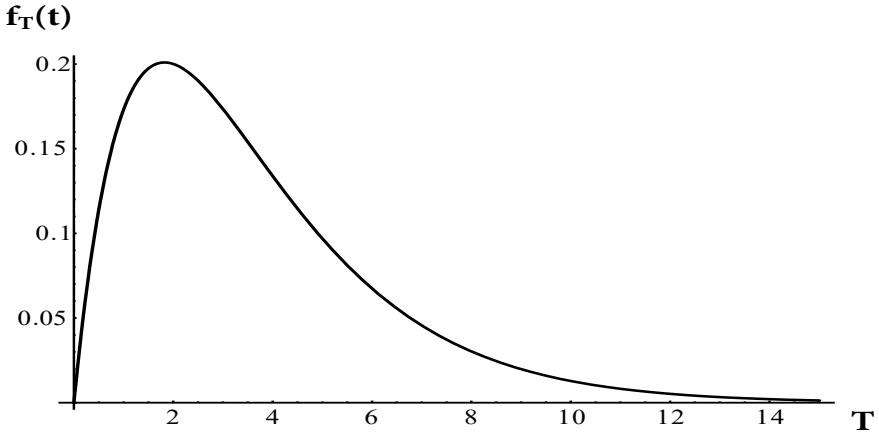
donde $F_X(x)$ es la función de distribución acumulada común a las variable $X_i$. En nuestro caso, $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$. Por tanto

$$P[T > t] = 1 - F_T(t) = e^{-6\lambda t} + 6(1 - e^{-\lambda t})e^{-(5\lambda t} = e^{-6\lambda t} + 6e^{-5\lambda t} - 6e^{-6\lambda t} =$$
$$= 6e^{-5\lambda t} - 5e^{-6\lambda t}$$

y

$$F_T(t) = 1 - 6e^{-5\lambda t} + 5e^{-6\lambda t}, \quad t \geq 0$$

Es evidente que esta función tiene las características de una función de distribución acumulada. En efecto, es positiva, creciente, y tal que $F_T(0) = 0$ y $F_T(\infty) = 1$. La función de densidad es, derivando,

$$f_T(t) = 30\lambda\Big(e^{-5\lambda t} - e^{-6\lambda t}\Big), \quad t \geq 0$$

Esta función puede verse en la siguiente figura para $\lambda = 0.1$