CPE (SEGUNDO CURSO)

PRÁCTICA 5 **SOLUCIONES** (**Curso 2024–2025**)

1.– Las dimensiones de una plancha metálica rectangular, X e Y pueden considerarse aleatorias, con distribuciones

$$f_X(x) = \begin{cases} x-1 & 1 \leq x < 2 \\ -x+3 & 2 \leq x \leq 3 \\ 0 & \textit{en otra parte} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1/2 & 2 \leq y \leq 4 \\ 0 & \textit{en otra parte} \end{cases}$$

Deducir la distribución del área de la plancha.

———————SOLUCIÓN———————

Supongamos que las variable X e Y son independientes y llamemos $Z = XY$ al área de la plancha. Obviamente $R_Z = [2, 12]$. Fijemos $X = x$. Entonces, operando como siempre

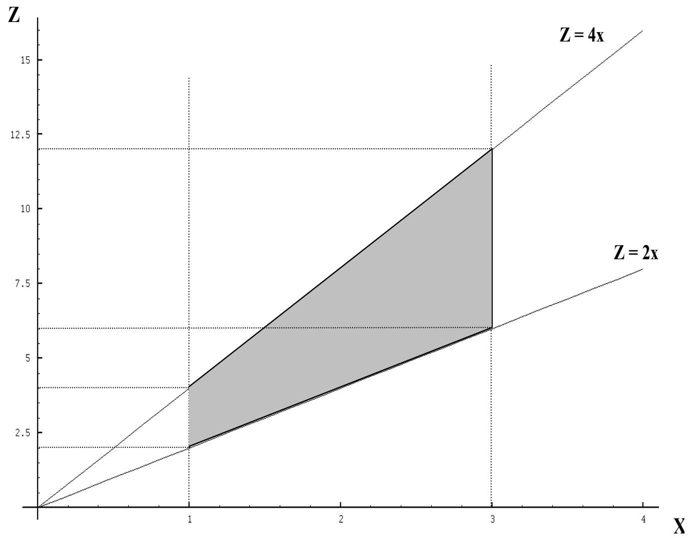
$$f_Z(z) = \int_{R_X} \frac{1}{x} f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \mathrm{d}x$$

Para que la función integrando sea diferente de cero, los argumentos de las funciones de densidad han de estar en su rango. Es decir

$2 \leq \frac{z}{x} \leq 4;$ $\quad \frac{1}{4} \leq \frac{x}{z} \leq \frac{1}{2};$ $\quad \frac{z}{4} \leq x \leq \frac{z}{2}$

$1 \leq x \leq 3$

Si analizamos gráficamente estas desigualdades obtenemos el área de integración.



Por tanto:

a) $2 \le z < 4$

$$f_Z(z) = \int_1^{\frac{z}{2}} \frac{1}{x} f_X(x) f_Y\big(\frac{z}{x}\big)\mathrm{d}x = \int_1^{\frac{z}{2}} \frac{1}{x}(x-1)\frac{1}{2}\mathrm{d}y = \frac{z}{4} - \frac{1}{2}\ln\frac{z}{2} - \frac{1}{2}$$

b) $4 \le z < 6$

$$f_Z(z) = \int_{\frac{z}{4}}^{\frac{z}{2}} \frac{1}{x} f_X(x) f_Y\big(\frac{z}{x}\big)\mathrm{d}x = \int_{\frac{z}{4}}^{2} \frac{1}{x}(x-1)\frac{1}{2}\mathrm{d}x + \int_2^{\frac{z}{2}} \frac{1}{x}(-x+3)\frac{1}{2}\mathrm{d}x =$$

$$= 2 - \frac{9}{2}\ln 2 - \frac{3}{8}z + 2\ln z$$

c) $6 \le z < 8$

$$f_Z(z) = \int_{\frac{z}{4}}^{3} \frac{1}{x} f_X(x) f_Y\big(\frac{z}{x}\big)\mathrm{d}x = \int_{\frac{z}{4}}^{2} \frac{1}{x}(x-1)\frac{1}{2}\mathrm{d}x + \int_2^{3} \frac{1}{x}(-x+3)\frac{1}{2}\mathrm{d}x =$$

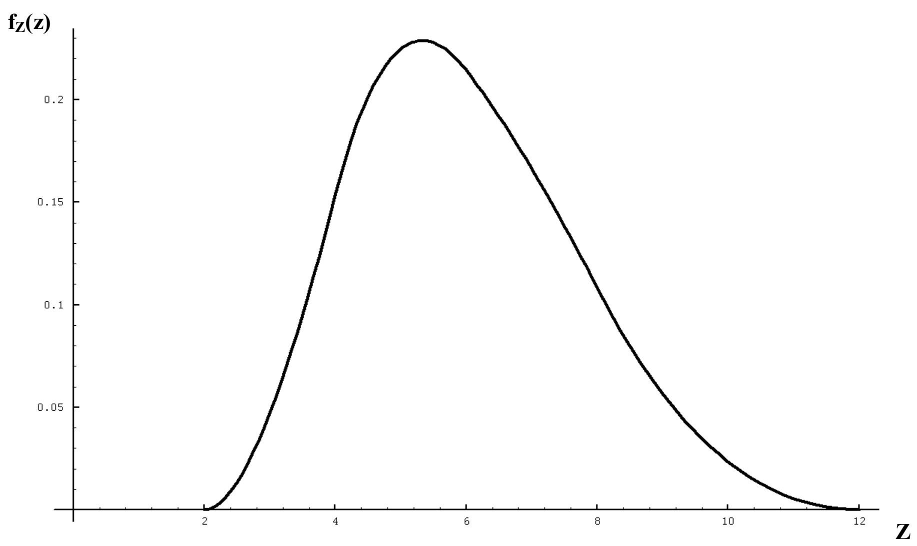
$$= \frac{1}{2} - 3\ln 2 + \frac{3}{2}\ln 3 - \frac{z}{8} + \frac{1}{2}\ln z$$

d) $8 \le z < 12$

$$f_Z(z) = \int_{\frac{z}{4}}^{3} \frac{1}{x} f_X(x) f_Y\big(\frac{z}{x}\big)\mathrm{d}x = \int_{\frac{z}{4}}^{3} \frac{1}{x}(-x+3)\frac{1}{2}\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\ln 3 + 3\ln 2 + \frac{z}{8} - \frac{3}{2}\ln z$$

Distribución que se grafica en la figura siguiente



2.– Considérense las variable aleatorias X e Y cuya función de densidad conjunta es:

$$f_{X,Y}(x,y) = e^{-y}, \quad x \geq 0, \quad y \geq x.$$

a) Calcular la distribución de la variable $Z = X + Y$

————————SOLUCIÓN————————

a) $Z = Y + X$, su rango es $R_Z = [0, \infty)$ y podemos calcular la distribución de Z conociendo la conjunta de (X, Y). Se tiene

$$f_Z(z) = \int_{R_X} f_{ZX}(z,x)\, dx$$

Calculamos ahora

$$f_{ZX}(z,x) = f_X(x) f_{Z|X=x}(z) = f_X(x) f_{Y|X=x}(y(z)) \left| \frac{dy}{dz} \right|$$

Teniendo en cuenta que $y = z - x$, la expresión de arriba se reduce a

$$f_{ZX}(z,x) = f_X(x) f_{Y|X=x}(z-x) = f_X(x) \frac{f_{XY}(x, z-x)}{f_X(x)} = f_{XY}(x, z-x)$$

y por lo tanto

$$f_Z(z) = \int_{R_X} f_{XY}(x, z-x)\, dx$$

Vamos a determinar ahora R_X

$$f_Z(z) = \int_0^{z/2} e^{-(z-x)}\, dx = e^{-z}(-1 + e^{z/2}), \quad z \in [0, \infty)$$

Y se comprueba que efectivamente es una función de densidad válida

---

3.– La Dirección General de Tráfico ha decidido colocar n radares móviles al azar en el tramo de carretera que une los centros de las ciudades A y B. La situación de estos radares no cambia durante el día, pero sí de un día al siguiente, de forma que los automovilistas que viajan por dicha carretera no conocen su situación hasta que encuentran la señal de "Velocidad controlada por radar" adecuadamente colocada, de acuerdo con la legislación vigente. Un automovilista sale un día cualquiera de A para dirigirse a C, que es un punto situado exactamente a mitad de distancia entre A y B.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no encuentre ningún radar en su viaje?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que los encuentre todos?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que encuentre como máximo un radar?

d) ¿Cómo cambian estas probabilidades al aumentar n?

————————SOLUCIÓN————————

Sea X_i la distancia entre el radar i y la ciudad A. Es evidente que $f_{X_i} = 1/L, \quad x_i \in [0, L]$

a) Llamemos $U = min\{X_i\}$. La probabilidad de que no encuentre ningún radar en su viaje es $P[U > L/2]$. Pero

$$P[U > L/2] = P[(X_1 > L/2) \cap (X_2 > L/2) \cap (X_3 > L/2) \cap ... \cap (X_n > L/2)] =$$
$$= \big(P[X > L/2]\big)^n = \big(1 - P[X \leq L/2]\big)^n = \big(1 - F_X(L/2)\big)^n$$

dado que las variables X_i son iid. Por tanto, como $F_{X_i} = x_i/L, \;\; x_i \in [0, L]$ resulta

$$P[U > L/2] = \big(1 - \frac{L/2}{L}\big)^n = \frac{1}{2^n}$$

b) Llamemos $V = max\{X_i\}$. La probabilidad de que encuentre los n radares en su viaje es $P[V \leq L/2]$. Pero

$$P[V \leq L/2] = P[(X_1 \leq L/2) \cap (X_2 \leq L/2) \cap (X_3 \leq L/2) \cap ... \cap (X_n \leq L/2)] =$$
$$= \big(P[X \leq L/2]\big)^n = \big(F_X(L/2)\big)^n$$

dado que las variables X_i son iid. Por tanto,

$$P[V \leq L/2] = \big(\frac{L/2}{L}\big)^n = \frac{1}{2^n}$$

c) Para calcular la probabilidad que nos piden tendremos que calcular el segundo mínimo de n variables aleatorias iid. Si a estas variables aleatorias las llamamos X_i (distancia del radar i al origen de coordenadas), la distribución de cualquiera de ellas es

$$f_X(x) = 1/L, \;\; F_X(x) = x/L, \;\; 0 \leq x \leq L$$

Si Y es el segundo mínimo, para que Y sea mayor que un cierto valor y, todas las variables X_i menos como mucho una han de ser superiores a ese valor y. Por tanto, dado que dichas variables son iid,

$$P[Y > y] = P[(X_1 > y) \cap (X_2 > y) \cap (X_3 > y) \cap ... \cap (X_n > y) \cup$$
$$\cup (X_1 \leq y) \cap (X_2 > y) \cap (X_3 > y) \cap ... \cap (X_n > y) \cup$$
$$\cup (X_1 > y) \cap (X_2 \leq y) \cap (X_3 > y) \cap ... \cap (X_n > y) \cup \ldots$$
$$\ldots \cup (X_1 > y) \cap (X_2 > y) \cap (X_3 > y) \cap ... \cap (X_n \leq y)]$$

y por tanto, teniendo en cuenta la incompatibilidad de los sucesos

$$P[Y > y] = (1 - F_X(y))^n + nF_X(y)(1 - F_X(y))^{n-1} = (1 - y/L)^n + n(y/L)(1 - y/L)^{n-1}$$

Luego

$$F_Y(y) = 1 - (1 - y/L)^n - n(y/L)(1 - y/L)^{n-1}, \;\; 0 \leq y \leq L$$

Obsérvese que esta función cumple los requisitos para ser una función de distribución acumulada adecuada, ya que es creciente, y $F_Y(0) = 0$ y $F_Y(L) = 1$.

Nos piden $P[Y > L/2]$. Sustituyendo

$$P[Y > L/2] = \Big(1 - 1/2\Big)^n + \frac{n}{2}(1 - 1/2)^{n-1} = \frac{n+1}{2^n}$$

d)

$\lim_{n\to\infty} P[U > L/2] = 0$

$\lim_{n\to\infty} P[V \leq L/2] = 0$

$\lim_{n\to\infty} P[Y > L/2] = 0$

4.– La intensidad luminosa observada en un punto, I, puede expresarse como $I = C/D^2$, donde C es la intensidad de la fuente luminosa medida en origen y D es la distancia desde el punto de observación a dicha fuente. Si se supone que C y D son independientes, y

$$f_C(c) = 1, \quad 1 \leq c \leq 2,$$

$$f_D(d) = e^{-d}, \quad d \geq 0,$$

calcular la distribución de I.

———————————SOLUCIÓN———————————

Sabemos que $I = \frac{C}{D^2}$. Calculemos primero la distribución de $Z = D^2$. La distribución de D es

$$f_D(d) = e^{-d}, \quad d \geq 0$$

Por tanto $R_Z = [0, \infty)$. Como la relación es monótona creciente

$$f_Z(z) = \frac{dd}{dz} f_D(d) = \frac{1}{2\sqrt{z}} e^{-\sqrt{z}}, \quad z \geq 0$$

y se comprueba fácilmente que es una función de densidad.

Calculemos ahora $I = \frac{C}{Z}$. Fijemos $Z = z$. Operando como siempre

$$f_I(i) = \int_{R_Z} z f_C(iz) f_Z(z) dz$$

Obviamente, $I \geq 0$. Comprobemos los límites de integración.

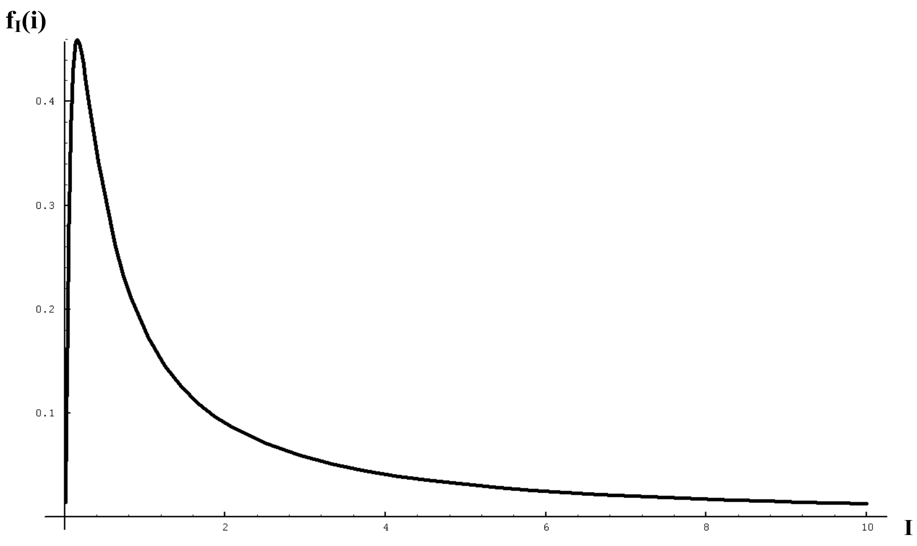
$1 \leq iz \leq 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{i} \leq z \leq \frac{2}{i}$

$z \geq 0$

Por lo tanto

$$f_I(i) = \int_{\frac{1}{i}}^{\frac{2}{i}} \frac{z}{2\sqrt{z}} e^{-\sqrt{z}} dz = e^{\frac{-1}{\sqrt{i}}} \left[\frac{1}{i} + \frac{2}{\sqrt{i}} + 2\right] - e^{\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{i}}} \left[\frac{2}{i} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{i}} + 2\right], \quad i \geq 0$$

cuya gráfica es



5.– En una cierta obra, sea X el tiempo en que el trabajo se interrumpe en un año por culpa de la lluvia, e Y el tiempo en que la interrupción del trabajo al año es debida a averías de la maquinaria. X e Y se consideran variables aleatorias independientes, con distribuciones $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$ y $f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda y}, \quad y \geq 0$. Considérense las siguientes variables: $U \equiv$ "tiempo total al año en que el trabajo se interrumpe", y $V \equiv$ "porcentaje de interrupción debido a la lluvia (en tanto por uno)".

a) ¿Son U y V independientes?

b) Calcular la función de densidad de V

———————SOLUCIÓN———————

a) Calculemos en primer lugar la función de densidad de la variable $U = X + Y$. Obviamente $R_U = [0, \infty)$. Fijemos $X = x$. Entonces, como X e Y son independientes, podemos escribir

$$f_{U|X}(u, x) = \left|\frac{dy}{du}\right| f_{Y|X}(y, x) = f_Y(y) = f_Y(u - x)$$

Y

$$f_{U,X}(u, x) = f_{U|X}(u, x) f_X(x) = f_Y(u - x) f_X(x) = \lambda^2 e^{-\lambda x} e^{-\lambda(u-x)} = \lambda^2 e^{-\lambda u}$$

Integrando obtenemos la siguiente integral de convolución

$$f_U(u) = \int_{R_X} f_X(x) f_Y(u - x) dx$$

Para que el integrando sea diferente de cero se ha de verificar simultáneamente que $0 \leq x < \infty$ y $0 \leq u - x < \infty$. Estas dos expresiones pueden escribirse como $0 \leq x < \infty$ y $-\infty < x \leq u$.Por tanto

$$f_U(u) = \int_{R_X} f_X(x) f_Y(u - x) dx = \int_0^u f_X(x) f_Y(u - x) dx = \int_0^u \lambda e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda(u-x)} dx =$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda u} \int_0^u dx = \lambda^2 u e^{-\lambda u}$$

Comprobación:

$$\int_0^\infty \lambda^2 u e^{-\lambda u} du = -(1 + u) e^{-\lambda u}\Big]_0^\infty = 1$$

Para calcular la distribución de $V = \frac{X}{U}$ fijamos primero $U = u$. (Obsérvese que obviamente $R_V = [0, 1]$).Entonces

$$f_{V|U}(v, u) = \left|\frac{dx}{dv}\right| f_{X|U}(x, u) = u f_{X|U}(x, u)$$

La distribución conjunta es

$$f_{V,U}(v, u) = f_{V|U}(v, u) f_U(u) = u f_{X|U}(x, u) f_U(u) = u f_{X,U}(x, u) = u f_{U,X}(u, x)$$

Pero la distribución $f_{U,X}(u, x)$ la habíamos obtenido anteriormente, por lo que

$$f_{V,U}(v, u) = u \lambda^2 e^{-\lambda u}$$

e integrando en u

$$f_V(v) = \int_0^\infty u \lambda^2 e^{-\lambda u} du = 1$$

como también habíamos visto anteriormente.

b) Y como se verifica que $f_{U,V}(u, v) = f_U(u) f_V(v)$, las variables U y V son independientes (aunque a simple vista pudiera parecer lo contrario)