CPE (SEGUNDO CURSO)

PRÁCTICA 5 **SOLUCIONES** (**Curso 2023–2024**)

1.– La intensidad luminosa observada en un punto, I, puede expresarse como $I = C/D^2$, donde C es la intensidad de la fuente luminosa medida en origen y D es la distancia desde el punto de observación a dicha fuente. Si se supone que C y D son independientes, y

$$f_C(c) = 1, \quad 1 \leq c \leq 2,$$

$$f_D(d) = e^{-d}, \quad d \geq 0,$$

calcular la distribución de I.

——————————SOLUCIÓN——————————

Sabemos que $I = \frac{C}{D^2}$. Calculemos primero la distribución de $Z = D^2$. La distribución de D es

$$f_D(d) = e^{-d}, \quad d \geq 0$$

Por tanto $R_Z = [0, \infty)$. Como la relación es monótona creciente

$$f_Z(z) = \frac{dd}{dz} f_D(d) = \frac{1}{2\sqrt{z}} e^{-\sqrt{z}}, \quad z \geq 0$$

y se comprueba fácilmente que es una función de densidad.

Calculemos ahora $I = \frac{C}{Z}$. Fijemos $Z = z$. Operando como siempre

$$f_I(i) = \int_{R_Z} z f_C(iz) f_Z(z) dz$$

Obviamente, $I \geq 0$. Comprobemos los límites de integración.

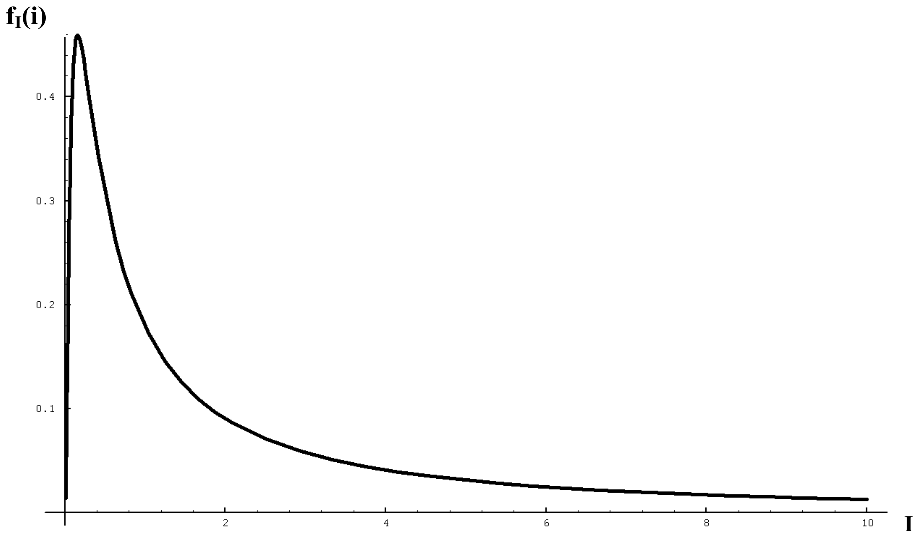
$1 \leq iz \leq 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{i} \leq z \leq \frac{2}{i}$

$z \geq 0$

Por lo tanto

$$f_I(i) = \int_{\frac{1}{i}}^{\frac{2}{i}} \frac{z}{2\sqrt{z}} e^{-\sqrt{z}} dz = e^{\frac{-1}{\sqrt{i}}} \left[\frac{1}{i} + \frac{2}{\sqrt{i}} + 2 \right] - e^{\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{i}}} \left[\frac{2}{i} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{i}} + 2 \right], \quad i \geq 0$$

cuya gráfica es



2.– La Dirección General de Tráfico ha decidido colocar n radares móviles al azar en el tramo de carretera que une los centros de las ciudades A y B. La situación de estos radares no cambia durante el día, pero sí de un día al siguiente, de forma que los automovilistas que viajan por dicha carretera no conocen su situación hasta que encuentran la señal de "Velocidad controlada por radar" adecuadamente colocada, de acuerdo con la legislación vigente. Un automovilista sale un día cualquiera de A para dirigirse a C, que es un punto situado exactamente a mitad de distancia entre A y B.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no encuentre ningún radar en su viaje?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que los encuentre todos?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que encuentre como máximo un radar?

d) ¿Cómo cambian estas probabilidades al aumentar n?

—————————SOLUCIÓN—————————

Sea X_i la distancia entre el radar i y la ciudad A. Es evidente que $f_{X_i} = 1/L, \quad x_i \in [0, L]$

a) Llamemos $U = min\{X_i\}$. La probabilidad de que no encuentre ningún radar en su viaje es $P[U > L/2]$. Pero

$$P[U > L/2] = P[(X_1 > L/2) \cap (X_2 > L/2) \cap (X_3 > L/2) \cap ... \cap (X_n > L/2)] =$$

$$= \big(P[X > L/2]\big)^n = \big(1 - P[X \leq L/2]\big)^n = \big(1 - F_X(L/2)\big)^n$$

dado que las variables X_i son iid. Por tanto, como $F_{X_i} = x_i/L, \quad x_i \in [0, L]$ resulta

$$P[U > L/2] = \big(1 - \frac{L/2}{L}\big)^n = \frac{1}{2^n}$$

b) Llamemos $V = max\{X_i\}$. La probabilidad de que encuentre los n radares en su viaje es $P[V \leq L/2]$. Pero

$$P[V \leq L/2] = P[(X_1 \leq L/2) \cap (X_2 \leq L/2) \cap (X_3 \leq L/2) \cap ... \cap (X_n \leq L/2)] =$$

$$= \big(P[X \leq L/2]\big)^n = \big(F_X(L/2)\big)^n$$

dado que las variables X_i son iid. Por tanto,

$$P[V \leq L/2] = (\frac{L/2}{L})^n = \frac{1}{2^n}$$

c) Para calcular la probabilidad que nos piden tendremos que calcular el segundo mínimo de n variables aleatorias iid. Si a estas variables aleatorias las llamamos X_i (distancia del radar i al origen de coordenadas), la distribución de cualquiera de ellas es

$$f_X(x) = 1/L, \quad F_X(x) = x/L, \quad 0 \leq x \leq L$$

Si Y es el segundo mínimo, para que Y sea mayor que un cierto valor y, todas las variables X_i menos como mucho una han de ser superiores a ese valor y. Por tanto, dado que dichas variables son iid,

$$P[Y > y] = P[(X_1 > y) \cap (X_2 > y) \cap (X_3 > y) \cap ... \cap (X_n > y) \cup$$
$$\cup (X_1 \leq y) \cap (X_2 > y) \cap (X_3 > y) \cap ... \cap (X_n > y) \cup$$
$$\cup (X_1 > y) \cap (X_2 \leq y) \cap (X_3 > y) \cap ... \cap (X_n > y) \cup \ldots$$
$$\ldots \cup (X_1 > y) \cap (X_2 > y) \cap (X_3 > y) \cap ... \cap (X_n \leq y)]$$

y por tanto, teniendo en cuenta la incompatibilidad de los sucesos

$$P[Y > y] = (1 - F_X(y))^n + nF_X(y)(1 - F_X(y))^{n-1} = (1 - y/L)^n + n(y/L)(1 - y/L)^{n-1}$$

Luego

$$F_Y(y) = 1 - (1 - y/L)^n - n(y/L)(1 - y/L)^{n-1}, \quad 0 \leq y \leq L$$

Obsérvese que esta función cumple los requisitos para ser una función de distribución acumulada adecuada, ya que es creciente, y $F_Y(0) = 0$ y $F_Y(L) = 1$.

Nos piden $P[Y > L/2]$. Sustituyendo

$$P[Y > L/2] = \Big(1 - 1/2\Big)^n + \frac{n}{2}(1 - 1/2)^{n-1} = \frac{n+1}{2^n}$$

d)

$\lim\limits_{n \to \infty} P[U > L/2] = 0$

$\lim\limits_{n \to \infty} P[V \leq L/2] = 0$

$\lim\limits_{n \to \infty} P[Y > L/2] = 0$

3.– Calcular la función de densidad de la variable resultante de la resta de dos variables aleatorias independientes, X e Y, uniformemente distribuidas entre 0 y 2 y 0 y 1, respectivamente.

——————————SOLUCIÓN——————————

Sean las tres variables X, Y y Z. Se busca calcular la distribución de $Z = X - Y$. Obviamente $R_Z = [-1, 2]$. Fijemos $Y = y$. Entonces $Z = X - y$. Por ser una relación monótona podemos escribir

$$f_{Z|Y}(z, y) = \Big|\frac{dx}{dz}\Big| f_{X|Y}(x, y) = f_{X|Y}(z + y, y)$$

y

$$f_{Z,Y}(Z,y) = f_{Z|Y}(z,y)f_y(y) = f_{X|Y}(z+y,y)f_y(y) = f_X(z+y)f_Y(y)$$

en donde hemos tenido en cuenta la independencia de las variable X e Y.

Ahora, integramospara hallar la distrución marginal de Z

$$f_Z(z) = \int_{R_Y} f_{Z,Y}(z,y)\mathrm{d}y = \int_{R_Y} f_X(z+y)f_Y(y)\mathrm{d}y$$

Para que la función integrando sea diferente de cero ha de verificarse, simultáneamente,

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 2; \\ 0 \leq y \leq 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 \leq z+y \leq 2; \\ \quad 0 \leq y \leq 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} -z \leq y \leq 2-z; \\ \quad 0 \leq y \leq 1; \end{cases}$$

Es decir, la integral anterior se escribe:

Para $z \in \{-1, 0\}$; $f_Z(z) = \displaystyle\int_{-z}^{1} \frac{1}{2}\, dy = \frac{1}{2} + \frac{z}{2}$.

Para $z \in \{0, 1\}$; $f_Z(z) = \displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{2}\, dy = \frac{1}{2}$

Para $z \in \{1, 2\}$; $f_Z(z) = \displaystyle\int_{0}^{2-z} \frac{1}{2}\, dy = \frac{2-z}{2}$

Y es inmediato comprobar que esta función es una función de densidad adecuada.

4.– Las dimensiones de una plancha metálica rectangular, X e Y pueden considerarse aleatorias, con distribuciones

$$f_X(x) = \begin{cases} x-1 & 1 \leq x < 2 \\ -x+3 & 2 \leq x \leq 3 \\ 0 & \textit{en otra parte} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1/2 & 2 \leq y \leq 4 \\ 0 & \textit{en otra parte} \end{cases}$$

Deducir la distribución del área de la plancha.

———————————SOLUCIÓN———————————

Supongamos que las variable X e Y son independientes y llamemos $Z = XY$ al área de la plancha. Obviamente $R_Z = [2, 12]$. Fijemos $X = x$. Entonces, operando como siempre

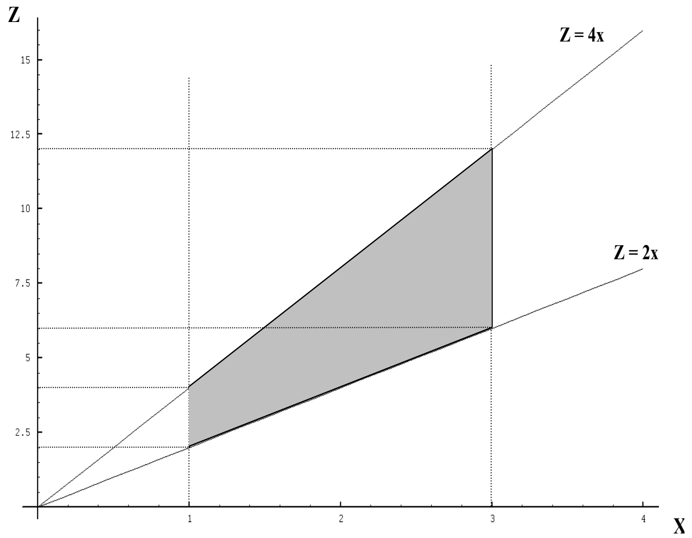
$$f_Z(z) = \int_{R_X} \frac{1}{x} f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right)\mathrm{d}x$$

Para que la función integrando sea diferente de cero, los argumentos de las funciones de densidad han de estar en su rango. Es decir

$2 \leq \frac{z}{x} \leq 4$; $\quad \frac{1}{4} \leq \frac{x}{z} \leq \frac{1}{2}$; $\quad \frac{z}{4} \leq x \leq \frac{z}{2}$

$1 \leq x \leq 3$

Si analizamos gráficamente estas desigualdades obtenemos el área de integración.



Por tanto:
a) $2 \leq z < 4$

$$f_Z(z) = \int_1^{\frac{z}{2}} \frac{1}{x} f_X(x) f_Y\big(\frac{z}{x}\big)\mathrm{d}x = \int_1^{\frac{z}{2}} \frac{1}{x}(x-1)\frac{1}{2}\mathrm{d}y = \frac{z}{4} - \frac{1}{2}\ln\frac{z}{2} - \frac{1}{2}$$

b) $4 \leq z < 6$

$$f_Z(z) = \int_{\frac{z}{4}}^{\frac{z}{2}} \frac{1}{x} f_X(x) f_Y\big(\frac{z}{x}\big)\mathrm{d}x = \int_{\frac{z}{4}}^{2} \frac{1}{x}(x-1)\frac{1}{2}\mathrm{d}x + \int_2^{\frac{z}{2}} \frac{1}{x}(-x+3)\frac{1}{2}\mathrm{d}x =$$

$$= 2 - \frac{9}{2}\ln 2 - \frac{3}{8}z + 2\ln z$$

c) $6 \leq z < 8$

$$f_Z(z) = \int_{\frac{z}{4}}^{3} \frac{1}{x} f_X(x) f_Y\big(\frac{z}{x}\big)\mathrm{d}x = \int_{\frac{z}{4}}^{2} \frac{1}{x}(x-1)\frac{1}{2}\mathrm{d}x + \int_2^{3} \frac{1}{x}(-x+3)\frac{1}{2}\mathrm{d}x =$$

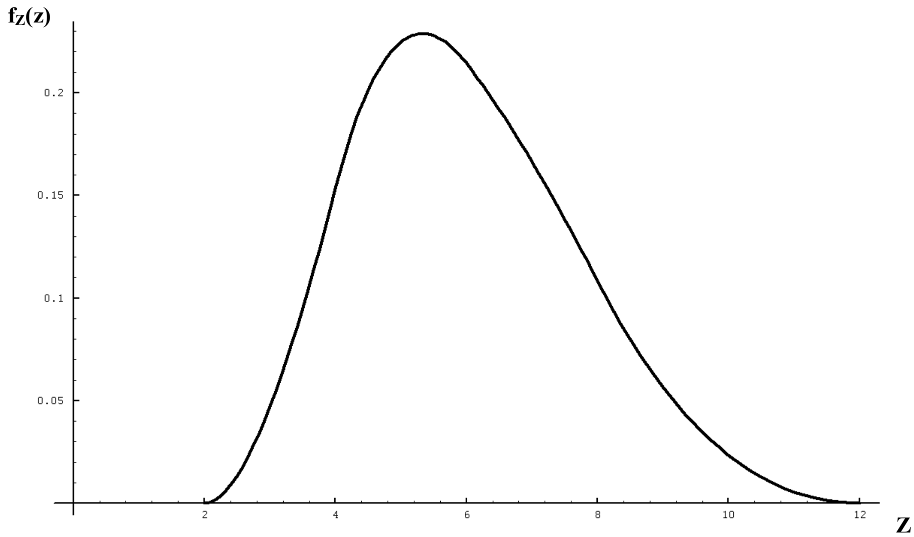
$$= \frac{1}{2} - 3\ln 2 + \frac{3}{2}\ln 3 - \frac{z}{8} + \frac{1}{2}\ln z$$

d) $8 \leq z < 12$

$$f_Z(z) = \int_{\frac{z}{4}}^{3} \frac{1}{x} f_X(x) f_Y\big(\frac{z}{x}\big)\mathrm{d}x = \int_{\frac{z}{4}}^{3} \frac{1}{x}(-x+3)\frac{1}{2}\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\ln 3 + 3\ln 2 + \frac{z}{8} - \frac{3}{2}\ln z$$

Distribución que se grafica en la figura siguiente



5.– El comportamiento de una traviesa de ferrocarril apoyada en terreno elástico puede asimilarse al de un muelle de constante elástica K. Suponiendo que K sea una variable aleatoria con función de densidad constante entre 15 y 25 $Tm./cm.$, calcular la función de densidad del asiento D que se produce cuando sobre la traviesa actúa una carga aleatoria, P, con función de densidad constante entre 0 y 20 $Tm.$ Especificar las hipótesis que se realicen.

Nota: $P = KD$

SOLUCIÓN

Como $P = KD$, el asiento puede escribirse como $D = \frac{P}{K}$. Sabemos que

$f_P(p) = \frac{1}{20}, \quad 0 \leq P \leq 20$ en Tm.

$f_K(k) = \frac{1}{10}, \quad 15 \leq K \leq 25$ en Tm/cm.

Obviamente $R_D = [0, \frac{4}{3}]$. Fijemos la variable aleatoria $K = k$. Suponiendo ambas variables independientes

$$f_D(d) = \int_{R_K} k f_P(kd) f_K(k) \mathrm{d}k$$

Consideremos los límites de integración para que esa integral no sea nula

$$\begin{cases} 0 \leq kd < 20; & 0 \leq k < 20/d; \\ 15 \leq k \leq 25; & 15 \leq k \leq 25 \end{cases}$$

Entonces

a) $0 \leq d \leq \frac{4}{5}$

$$f_D(d) = \int_{15}^{25} k \frac{1}{20} \frac{1}{10} \mathrm{d}k = \frac{1}{200} \int_{15}^{25} k \mathrm{d}k = 1$$

b) $d > \frac{4}{5}$

$$f_D(d) = \int_{15}^{20/d} k\frac{1}{20}\frac{1}{10}\mathrm{d}k = \frac{1}{d^2} - \frac{9}{16}$$

y es inmediato comprobar que, efectivamente, corresponde a una función de densidad sin más que comprobar

$$\int_0^{4/5} \mathrm{d}d + \int_{4/5}^{4/3} (\frac{1}{d^2} - \frac{9}{16})\mathrm{d}d = 1$$