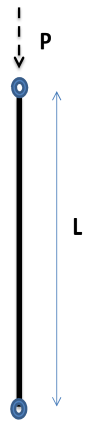
CPE (SEGUNDO CURSO)

PRÁCTICA 4 **SOLUCIONES** **(Curso 2023–2024)**

1.– La carga crítica de pandeo a flexión de una columna vertical biarticulada en sus extremos (ver Figura) viene dada por la denominada carga de Euler, P, y se calcula como

$$P = \pi^2 \frac{E \times I}{L^2}$$

siendo P la carga de Euler (en N) E el módulo de Young (en Pa), I el momento de inercia de la sección de la columna (en m^4) y L la longitud de la misma entre apoyos (en m). Para una columna de sección estrictamente constante y de material homogéneo e isótropo, tanto E como I pueden considerarse constantes. Supongamos que, en cambio, L sufre ligeras variaciones, de forma que puede suponerse que la longitud de la columna es una variable aleatoria uniformemente distribuida con rango $[9.95 \text{ m}, 10.05 \text{ m}]$. Calcular la distribución de P. Si la carga axial a la que va a estar sometido el pilar es de R= 870 KN, el módulo de elasticidad del material es de 27000 MPa y la columna es de sección cuadrada con lado 0.25 m, ¿cuál es la probabilidad de que dicha columna pandee? O, lo que es lo mismo, ¿cuál es la probabilidad de que la carga axial supere la carga de Euler?



Nota: con estos datos $\pi^2(E \times I) = 86.7446\ 10^6\ N \times m^2$

——————————SOLUCIÓN——————————

Llamemos $A = \pi^2(E \times I)$. Entonces $P = A/L^2$, donde A es una constante y L una variable aleatoria con función de densidad

$$f_L(l) = 10, \quad R_L = [9.95, 10.05], \quad L \text{ en metros.}$$

Durante el cálculo llamaremos $b = 9.95$ y $c = 10.05$ para simplificar la escritura, y particularizaremos al final. Por tanto, $R_P = \left[\frac{A}{c^2}, \frac{A}{b^2}\right]$.

Llamemos $Z = L^2$. Obviamente, $R_Z = [b^2, c^2]$. Dado que esta relación es monótona creciente,

$$f_Z(z) = \left|\frac{dl}{dz}\right| f_L(l) = \frac{1}{2\sqrt{z}} f_L(l) = \frac{1}{2\sqrt{z}} \times 10 = \frac{10}{2\sqrt{z}}$$

Comprobación:

$$\int_{b^2}^{c^2} \frac{10}{2\sqrt{z}}\, dz = 10\sqrt{z}\Big|_{b^2}^{c^2} = 10(c-b) = 1$$

A continuación deduciremos la distribución de $P = A/Z$. Al ser esta relación monótona decreciente

$$f_P(p) = \left|\frac{dz}{dp}\right| f_Z(z) = \frac{A}{p^2} \times \frac{10}{2\sqrt{z}} = \frac{A}{p^2} \times \frac{10}{2\sqrt{A/p}} = \frac{10A\sqrt{p}}{2p^2\sqrt{A}} = \frac{5\sqrt{A}}{p\sqrt{p}}$$

Comprobación:

$$\int_{\frac{A}{c^2}}^{\frac{A}{b^2}} \frac{5\sqrt{A}}{p\sqrt{p}}\, dp = -5\sqrt{A} \times \frac{2}{\sqrt{p}}\Bigg|_{\frac{A}{c^2}}^{\frac{A}{b^2}} = 10\sqrt{A}\left[\frac{c}{\sqrt{A}} - \frac{b}{\sqrt{A}}\right] = 10(c-b) = 1$$

Luego, resumiendo

$$f_P(p) = \frac{5\sqrt{A}}{p\sqrt{p}}, \quad R_P = \left[\frac{A}{c^2}, \frac{A}{b^2}\right] = \left[\frac{A}{101.0025}, \frac{A}{99.0025}\right]$$

Calculemos ahora la función de distribución acumulada $F_P(p)$.

$$F_P(p) = \int_{\frac{A}{c^2}}^{p} \frac{5\sqrt{A}}{p\sqrt{p}}\, dp = -5\sqrt{A} \times \frac{2}{\sqrt{p}}\Bigg|_{\frac{A}{c^2}}^{p} = 10\sqrt{A} \times \left[\frac{c}{\sqrt{A}} - \frac{1}{\sqrt{p}}\right], \quad R_P = \left[\frac{A}{c^2}, \frac{A}{b^2}\right]$$

Por tanto,

$$P[P \leq R] = F_P(R) = 10\sqrt{A} \times \left[\frac{c}{\sqrt{A}} - \frac{1}{\sqrt{R}}\right]$$

Escribiendo todas las cargas en KN y operando

$$P[P \leq R] = 2945.243\left(\frac{10.05}{294.524} - \frac{1}{\sqrt{R}}\right)$$

y para $R = 870$ KN,

$$P[P \leq 870] = 0.647$$

muy alta. El pilar está mal dimensionado a pandeo. Si, por ejemplo, el lado de la sección cuadrada fuera de 0.35 m ($I = 1.25 \times 10^{-3}$), entonces $A = 333.238\ 10^6\ N \times m^2$, y el rango de la carga de Euler sería [3299.3 KN, 3365.95 KN]. Luego la probabilidad de romper por pandeo con cargas axiales de hasta 3300 KN es nula.

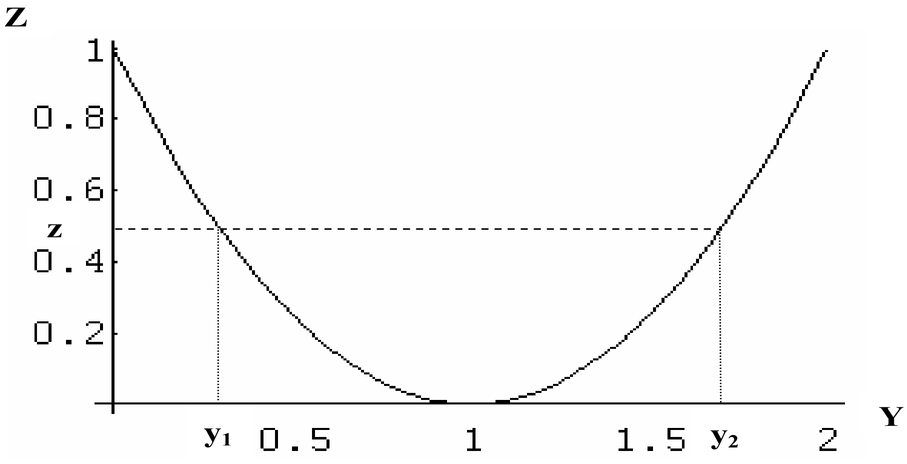
2.– Sea Y la suma de dos variables aleatorias independientes uniformemente distribuidas (densidad constante) en $[0,1]$. Determinar la función de densidad de $(Y-1)^2$,.

SOLUCIÓN

Sabemos que la distribución de la variable Y es

$$f_Y(y) = \begin{cases} y & 0 \leq y \leq 1 \\ 2-y & 1 \leq y \leq 2 \\ 0 & y \notin [0,2] \end{cases}$$

La relación entre $Z = (Y-1)^2$ e Y es la que se muestra en la Figura siguiente



De la figura se deduce que

$$P[Z \leq z] = P[y_1 \leq y \leq y_2] = F_Y[y_2] - F_Y[y_1]$$

Luego hay que calcular la función de distribución acumulada. Para $0 \leq y \leq 1$,

$$F_Y(y) = \int_0^y f_Y(y)dy = \int_0^y ydy = \frac{y^2}{2}$$

Para $1 \leq y \leq 2$,

$$F_Y(y) = 1/2 + \int_1^y f_Y(y)dy = 1/2 + \int_1^y (2-y)dy = 1 - \frac{(2-y)^2}{2}$$

Esta función de distribución cumple todas las características que ha de cumplir una función de distribución acumulada.

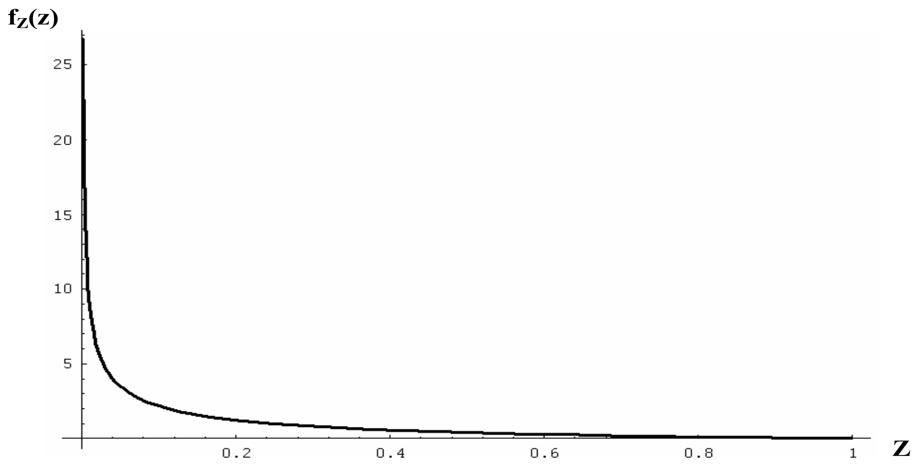
Por tanto, como $y_1 = 1 - \sqrt{z}$ y $y_2 = 1 + \sqrt{z}$ resulta

$$F_Z(z) = 1 - \frac{(2-(1+\sqrt{z}))^2}{2} - \frac{(1-\sqrt{z})^2}{2} = 1 - (1-\sqrt{z})^2, \quad z \in [0,1]$$

que tiene todas las características que ha de tener una función de distribución acumulada. Derivando para calcular la función de densidad, obtenemos

$$f_z(z) = \frac{1}{\sqrt{z}} - 1, \quad z \in [0,1]$$

La forma de esta función de densidad puede verse en la siguiente Figura.



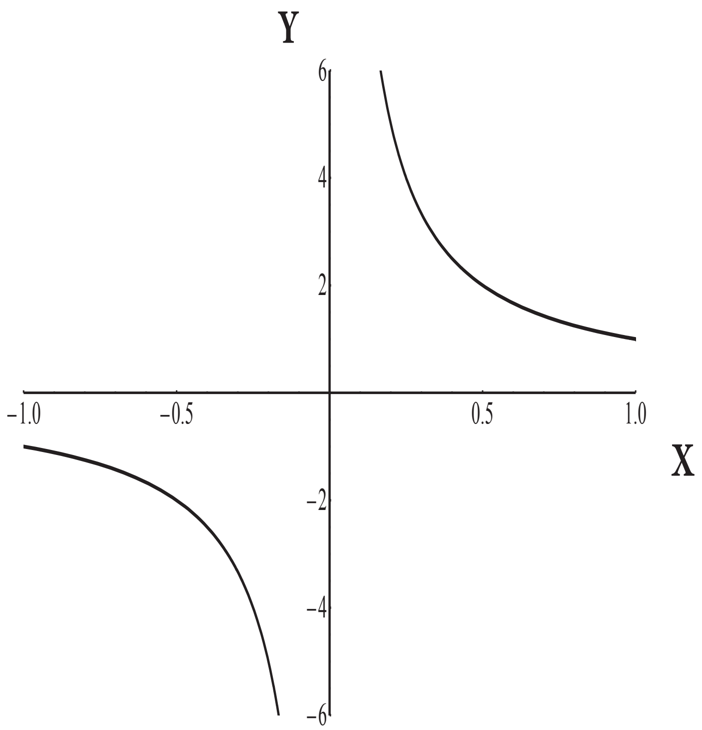
3.– Considérese una variable aleatoria X uniformemente distribuida entre -1 y 1, y sea Y la inversa de dicha variable. Calcular

a) La distribución de Y.

b) La probabilidad de que Y sea menor de 0.75.

——————————SOLUCIÓN——————————

La función de densidad de X es $f_X(x) = \frac{1}{2}, \quad -1 \leq x \leq 1$, y por tanto $F_X(x) = \frac{1+x}{2}$. Sea $Y = \frac{1}{X}$. El rango de Y será $R_Y = (-\infty, -1] + [1, \infty)$. La relación $X - Y$ puede verse en la siguiente figura



a) Calculemos la función de distribución acumulada para distintos valores de Y

1.- $y \leq -1$

$$F_Y(y) = P[Y \leq y] = P[\frac{1}{y} \leq X \leq 0] = F_X(0) - F_X(\frac{1}{y}) = -\frac{1}{2y}$$

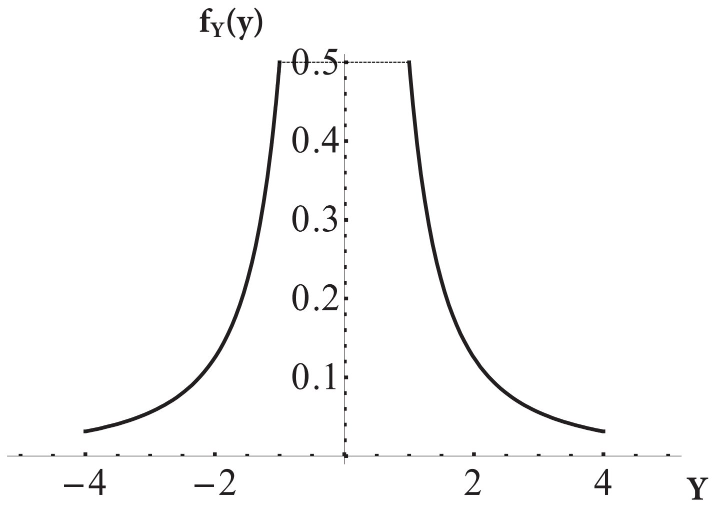
2.- $y \geq 1$

$$F_Y(y) = P[Y \leq y] = \frac{1}{2} + P[\frac{1}{y} \leq X \leq 1] = \frac{1}{2} + F_X(1) - F_X(\frac{1}{y}) = 1 - \frac{1}{2y}$$

La función de densidad es, para todo el rango

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{1}{2y^2}, \quad R_Y = (-\infty, -1] + [1, \infty)$$

cuya gráfica puede verse en la siguiente figura, siendo inmediato comprobar que efectivamente reune las condiciones para ser una función de densidad.

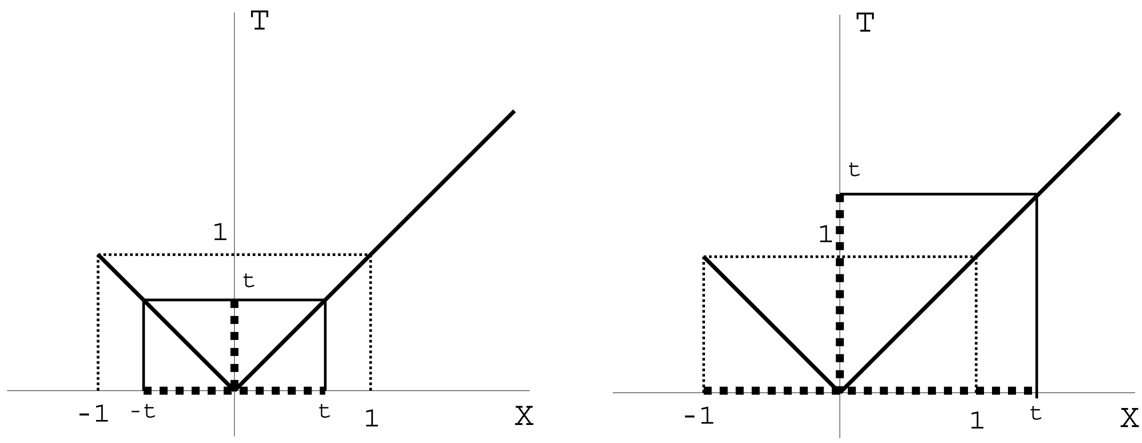


b) Obviamente $P[Y < 0.75] = P[Y \leq 0] = \frac{1}{2}$

4.– Considérese la variable aleatoria X con función de densidad $f_X(x) = e^{-(x+1)}$ en $-1 < x < \infty$. Sea $T = |X|$. Calcúlese la función de distribución acumulada de T.

SOLUCIÓN

El rango de T es $R_T = [0, \infty[$. Como indica el siguiente gráfico, para calcular la función de distribución acumulada de T tendremos que distinguir dos casos:



(a) Si $t \in [0, 1]$: en este caso

$$F_T(t) = P[T \leq t] = P[|X| \leq t] = P[-t \leq X \leq t]$$
$$= \int_{-t}^{t} e^{-(x+1)}\, dx = e^{-1}(e^t - e^{-t})$$

(b) Si $t \geq 1$: en este caso

$$\begin{aligned} F_T(t) &= P[T \leq t] = P[|X| \leq t] = P[-1 \leq X \leq t] \\ &= \int_{-1}^{t} e^{-(x+1)}\, dx = 1 - e^{-1-t} \end{aligned}$$

Poniendo $F_T(t) = 0$ para $t \leq 0$, completamos la determinación de $F_T(t)$.

5.– Sea X una variable aleatoria definida en el $R_X = [-1, 1]$ y $f_X(x) = \frac{1+x}{2}$. Se pide:

a) Calcular la distribución de la variable $Y = (X - \frac{1}{2})^2$

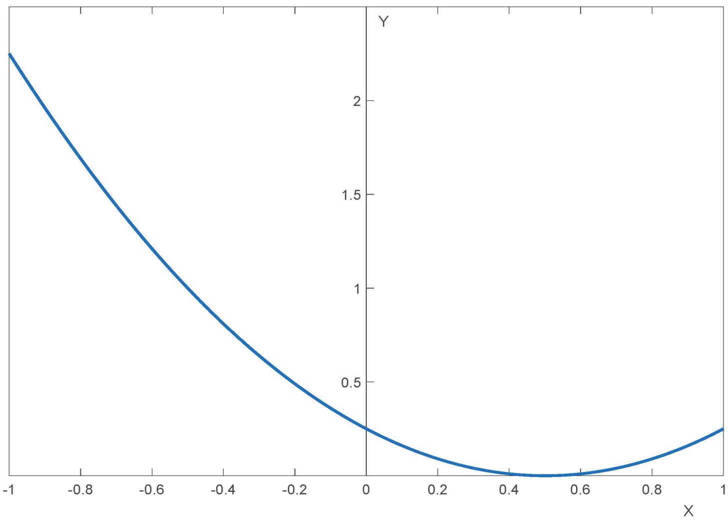
b) Calcular la distribución de $Z = W - X$, donde W está uniformemente distribuida en el intervalo $[0, 4]$ y es independiente de X.

SOLUCIÓN

a) La función de distribución acumulada de X es

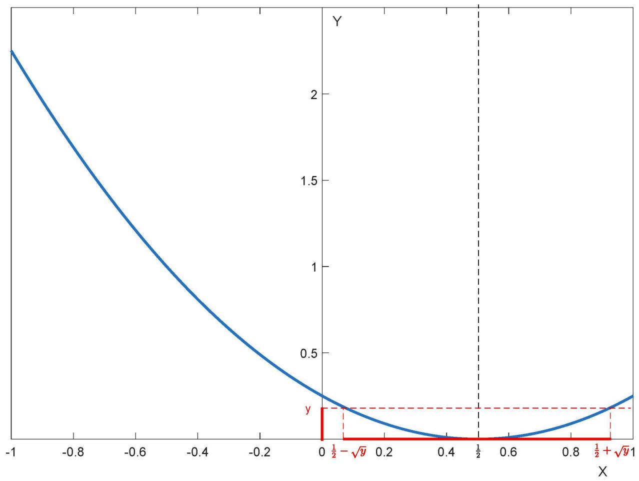
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -1 \\ \displaystyle\int_{-1}^{x} \frac{1+x}{2}\, dx = \frac{(1+x)^2}{4} & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Al representar $Y = (X - \frac{1}{2})^2$ vemos que el rango de la variable Y es $R_Y = [0, \frac{9}{4}]$ y que la relación entre las variables X e Y no es monótona.



Para calcular la función de distribución acumulada $F_Y(y) = P[Y \leq y]$ tenemos que distinguir dos casos, $0 \leq y \leq 1/4$ y $1/4 \leq y \leq 9/4$. Teniendo en cuenta

$$y = (x - 1/2)^2 \Rightarrow x = 1/2 \pm \sqrt{y},$$



Para $y \in [0, 1/4]$ se calcula:

$$F_Y(y) = P[Y \leq y] = P[1/2 - \sqrt{y} \leq X \leq 1/2 + \sqrt{y}] = F_X(1/2 + \sqrt{y}) - F_X(1/2 - \sqrt{y}) =$$
$$= \frac{(1 + 1/2 + \sqrt{y})^2}{4} - \frac{(1 + 1/2 - \sqrt{y})^2}{4} = \frac{3\sqrt{y}}{2}$$

mientras que para $y \in [1/4, 9/4]$ la relación es monótona

$$F_Y(y) = P[Y \leq y] = P[X > 1/2 - \sqrt{y}] = 1 - F_X(1/2 - \sqrt{y}) =$$
$$= 1 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - \sqrt{y} + 1\right)^2 = \frac{1}{16}\left(-4y + 12\sqrt{y} + 7\right)$$

La función de distribución acumulada de Y es

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ \dfrac{3\sqrt{y}}{2} & \text{si } 0 \leq y \leq 1/4 \\ \dfrac{1}{16}\left(-4y + 12\sqrt{y} + 7\right) & \text{si } 1/4 \leq y \leq 9/4 \\ 1 & \text{si } y > 9/4. \end{cases}$$

b) Se busca calcular la distribución de $Z = W - X$. Obviamente $R_Z = [-1, 5]$. Fijemos $X = x$. Entonces $Z = W - x$. Por ser una relación monótona podemos escribir

$$f_{Z|X}(z, x) = \left|\frac{dw}{dz}\right| f_{W|X}(w, x) = f_{W|X}(z + x, x)$$

y

$$f_{Z,X}(z, x) = f_{Z|X}(z, x) f_X(x) = f_{W|X}(z + x, x) f_X(x) = f_W(z + x) f_X(x)$$

en donde hemos tenido en cuenta la independencia de las variables W y X. Ahora, integramos para hallar la distrución marginal de Z

$$f_Z(z) = \int_{R_X} f_{Z,X}(z, x)\mathrm{d}x = \int_{R_X} f_W(z + x) f_X(x)\mathrm{d}x$$

Para que la función integrando sea diferente de cero ha de verificarse, simultáneamente,

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 1; \\ 0 \leq w \leq 4; \end{cases} \qquad \begin{cases} -1 \leq x \leq 1; \\ 0 \leq (z+x) \leq 4; \end{cases} \qquad \begin{cases} -1 \leq x \leq 1; \\ -z \leq x \leq 4-z; \end{cases}$$

Es decir, la integral anterior se escribe:

Para $z \in [-1, 1]$; $f_Z(z) = \displaystyle\int_{-z}^{1} \frac{1}{4} \frac{x+1}{2}\, dx = \frac{1}{16}(-z^2 + 2z + 3)$.

Para $z \in [1, 3]$; $f_Z(z) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{4} \frac{x+1}{2}\, dx = \frac{1}{4}$

Para $z \in [3, 5]$; $f_Z(z) = \displaystyle\int_{-1}^{4-z} \frac{1}{4} \frac{x+1}{2}\, dx = \frac{1}{16}(z-5)^2$

Y es inmediato comprobar que esta función es una función de densidad adecuada.