CPE (SEGUNDO CURSO)

PRÁCTICA 3 **SOLUCIONES** (**Curso 2023–2024**)

1.– La variables aleatorias X e Y tienen la siguiente función de densidad conjunta:

$$f_{XY}(x,y) = kx(x-y), \quad 0 < x < 2, \quad -x < y < x.$$

a) Determínese k para que dicha función esté bien definida.

b) Calcúlese las distribuciones marginales de X y de Y.

c) Dibújese esquemáticamente la función de densidad marginal de Y.

SOLUCIÓN

a) Para que la función sea una función de densidad conjunta adecuada ha de verificarse

$$\int_{R_{XY}} f_{XY}(x,y)dxdy = 1$$

En nuestro caso

$$\int_{R_{XY}} f_{XY}(x,y)dxdy = \int_0^2 \left[\int_{-x}^{x} kx(x-y)dy\right]dx = \int_0^2 -kx\frac{(x-y)^2}{2}\Bigg]_{-x}^{x} dx =$$

$$= \int_0^2 2kx^3 dx = k\frac{x^4}{2}\Bigg]_0^2 = 8k \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{8}$$

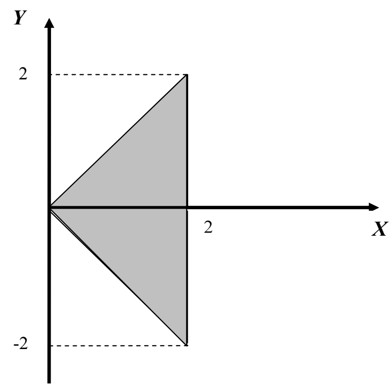
b) La función de densidad marginal de X es

$$f_X(x) = \int_{R_Y} f_{XY}(x,y)dy = \int_{-x}^{x} \frac{1}{8}x(x-y)dy = -\frac{1}{8}x\frac{(x-y)^2}{2}\Bigg]_{-x}^{x} = \frac{x^3}{4}$$

Obviamente esta es una función correcta, ya que

$$\int_0^2 \frac{x^3}{4}dx = \frac{x^4}{16}\Bigg]_0^2 = 1$$

La función de densidad marginal de Y, teniendo en cuenta que el rango conjunto es



puede obtenerse de la siguiente forma:

Para $-2 \leq y \leq 0$

$$f_Y(y) = \int_{R_X} f_{XY}(x,y)dx = \int_{-y}^{2} \frac{1}{8}x(x-y)dx = \int_{-y}^{2} \frac{1}{8}(x^2 - xy)dx = \frac{1}{8}(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2 y}{2})\Big]_{-y}^{2} = \frac{5y^3 - 12y + 16}{48}$$

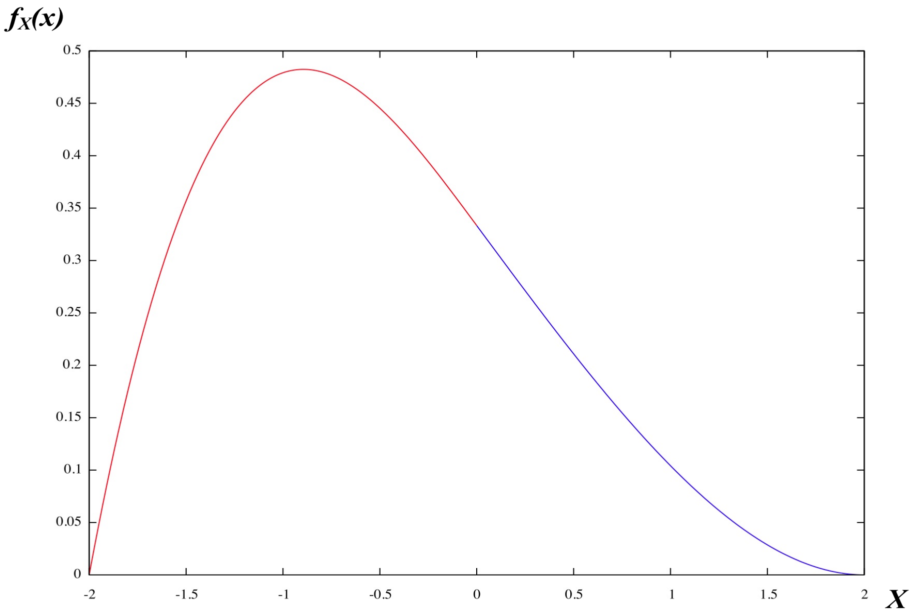
Para $0 \leq y \leq 2$

$$f_Y(y) = \int_{R_X} f_{XY}(x,y)dx = \int_{y}^{2} \frac{1}{8}x(x-y)dx = \int_{y}^{2} \frac{1}{8}(x^2 - xy)dx = \frac{1}{8}(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2 y}{2})\Big]_{y}^{2} = \frac{y^3 - 12y + 16}{48}$$

Obviamente, también se trata de una función correcta ya que

$$\int_{-2}^{0} \frac{5y^3 - 12y + 16}{48} dy + \int_{0}^{2} \frac{y^3 - 12y + 16}{48} dy = 0.75 + 0.25 = 1$$

c) La función de densidad de Y es de la siguiente forma:



2.– Sean X e Y dos variables aleatorias cuya función de densidad conjunta es

$$f_{X,Y}(x,y) = 1/2, \quad 0 \leq x \leq y, \quad 0 \leq y \leq 2.$$

Calcular:

a) $f_X(x)$ y $f_Y(y)$

b) $F_{X,Y}(x,y)$, $F_X(x)$ y $F_Y(y)$

c) $f_{X|Y}(x,y)$ y $f_{X|Y\leq 3/2}(x)$

SOLUCIÓN

Es evidente que, a la vista del rango de X, las variables no son independientes.

a)

$$f_X(x)=\int_{R_Y} f_{X,Y}(x,y)dy=\int_x^2 \frac{1}{2}dy=\frac{2-x}{2};\qquad 0\leq x\leq 2$$

Comprobación

$$\int_0^2 \frac{2-x}{2}dx=-\frac{(2-x)^2}{4}\Bigg|_0^2=1$$

$$f_Y(y)=\int_{R_X} f_{X,Y}(x,y)dx=\int_0^y \frac{1}{2}dx=\frac{y}{2};\qquad 0\leq y\leq 2$$

que verifica igualmente las propiedades que ha de cumplir una función de densidad.

Como ya sabíamos $f_{X,Y}(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$

b)

$$F_X(x)=\int_0^x \frac{2-x}{2}dx=1-\frac{(2-x)^2}{4}\quad \text{para}\quad 0\leq x\leq 2$$

Adicionalmente $F_X(x)=0$ para $x\leq 0$ y $F_X(x)=1$ para $x\geq 2$

$$F_Y(y)=\int_0^y \frac{y}{2}dy=\frac{y^2}{4}\quad \text{para}\quad 0\leq y\leq 2$$

Adicionalmente $F_Y(y)=0$ para $y\leq 0$ y $F_Y(y)=1$ para $y\geq 2$

Las comprobaciones para $F_X(x)$ y $F_X(x)$ son inmediatas.

Con respecto a la función de distribución acumulada conjunta,

$$F_{X,Y}(x,y)=\int_0^x\int_x^y f_{X,Y}(x,y)dxdy=\int_0^x\int_x^y \frac{1}{2}dxdy=$$

$$=\int_0^x \frac{y-x}{2}dx=\frac{yx}{2}-\frac{x^2}{4}\quad \text{para}\quad 0\leq x\leq y\quad \text{y}\quad 0\leq y\leq 2$$

Adicionalmente:

$F_{X,Y}(x,y)=0$ para $x\leq 0$ o $y\leq 0$

$F_{X,Y}(x,y)=0$ para $x\geq y$

$F_{X,Y}(x,y)=1$ para $\Big(x\geq 0$ e $y\geq 2\Big)$ o $\Big(x\geq 0$ e $y\geq 2\Big)$

Comprobaciones: aparte de las obvias

$F_{X,Y}(0,y)=F_{X,Y}(x,0)=0$

$F_{X,Y}(x,2)=\frac{2x}{2}-\frac{x^2}{4}=1-\frac{(2-x)^2}{4}=F_X(x)$

$F_{X,Y}(y,y)=\frac{y.y}{2}-\frac{y^2}{4}=\frac{y^2}{4}=F_Y(y)$

$F_{X,Y}(y,2) = \frac{y^2}{2} - \frac{y^2}{4}\Big|_2 = 1$

c)

$$f_{X|Y}(x,y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{1/2}{\frac{y}{2}} = \frac{1}{y}, \quad 0 \leq x \leq y$$

Comprobación:

$$\int_0^y f_{X|Y}(x,y)dx = \int_0^y \frac{1}{y}dx = \frac{y}{y} = 1$$

Para calcular $f_{X|Y\leq 3/2}(x)$ calcularemos primero la función de distribución acumulada condicional.

$$F_{X|Y\leq 3/2}(x) = P[X \leq x|Y \leq 3/2] = \frac{P[X \leq x \cap Y \leq 3/2]}{P[Y \leq 3/2]} = \frac{F_{X,Y}(x,3/2)}{F_Y(3/2)} =$$

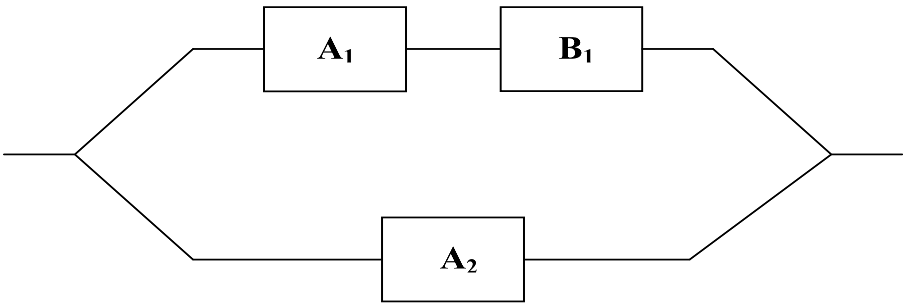
$$= \frac{\frac{\frac{3x}{2}}{2} - \frac{x^2}{4}}{\frac{(3/2)^2}{4}} = \frac{3x - x^2}{(3/2)^2} \text{ para } 0 \leq x \leq 3/2$$

Y es inmediato comprobar que $F_{X|Y\leq 3/2}(0) = 0$ y $F_{X|Y\leq 3/2}(3/2) = 1$.

Luego

$$f_{X|Y\leq 3/2}(x) = \frac{dF_{X|Y\leq 3/2}(x)}{dx} = \frac{3-2x}{(3/2)^2} = \frac{12-8x}{9} \text{ para } 0 \leq x \leq 3/2$$

3.– Una central hidroeléctrica tiene algunos sistemas duplicados con el fin de mejorar la seguridad del servicio. Un sistema hidráulico S, representado en la figura, falla (S = 0) si las dos ramas en paralelo que lo componen R_1, R_2 fallan simultáneamente $(R_1 = 0, R_2 = 0)$.



La rama R_1 tiene dos elementos A_1 y B_1 en serie y funciona si ambos elementos no fallan $(A_1 = 1, B_1 = 1)$. A_1 y B_1 funcionan independientemente. La rama R_2 tiene un solo elemento A_2, es decir $R_2 = 0$ si $A_2 = 0$. Se sabe que A_2 y B_1 funcionan independientemente y se conocen las siguientes probabilidades:

$$p_0 = P[A_1 = 0|A_2 = 0] = P[A_2 = 0|A_1 = 0]$$
$$p_1 = P[A_1 = 0|A_2 = 1] = P[A_2 = 0|A_1 = 1]$$
$$p_b = P[B_1 = 0]$$

Se pide

a) Hallar las probabilidades $P[A_1 = 0]$ y $P[A_2 = 0]$.

b) Hallar las probabilidades de ambas ramas $P[R_1 = 0]$ y $P[R_2 = 0]$.

c) Hallar la probabilidad de fallo del sistema $P[S = 0]$ y compararla con $P[R_1 = 0]$.

———————SOLUCIÓN———————

a) Se trata de determinar las probabilidades marginales de variables aleatorias a partir de sus condicionales. Este problema equivale al de determinar una distribución conjunta a partir de las condicionales. El teorema de Bayes establece que

$$P[A_2 = 0|A_1 = 0] = \frac{P[A_1 = 0|A_2 = 0]P[A_2 = 0]}{P[A_1 = 0|A_2 = 0]P[A_2 = 0] + P[A_1 = 0|A_2 = 1]P[A_2 = 1]},$$

donde debe tenerse en cuenta que los sucesos $A_2 = 0$ y $A_2 = 1$ son los posibles valores de la variable de Bernoulli A_2. Si en la expresión anterior se sustituyen los valores conocidos de las probabilidades condicionales, se obtiene

$$p_0 = \frac{p_0 P[A_2 = 0]}{p_0 P[A_2 = 0] + p1(1 - P[A_2 = 0])}$$

de donde se puede despejar la probabilidad marginal $P[A_2 = 0]$ obteniéndose

$$P[A_2 = 0] = \frac{p_1}{1 + p_1 - p_0}.$$

Es fácil comprobar que el cociente resultante está comprendido entre 0 y 1 cualesquiera que sean las probabilidades p_0 y p_1. Para hallar $P[A_1 = 0]$ basta observar la simetría del problema respecto a A_1 y A_2 para deducir que $P[A_1 = 0] = P[A_2 = 0]$. Lo mismo se obtendría escribiendo el teorema de Bayes para la condicional $P[A_1 = 0|A_2 = 0]$.

b) La rama R_2 del sistema es idéntica a A_2 por lo que $P[R_2 = 0] = P[A_2 = 0]$ ya conocida. La rama R_1 está constituida por dos dispositivos en serie, A_1 y B_1, cuyo funcionamiento es independiente. La forma más directa de obtener el resultado (no la única) es

$$P[R_1 = 0] = 1 - P[R_1 = 1] = 1 - P[A_1 = 1 \cap B_1 = 1] = 1 - P[A_1 = 1]P[B_1 = 1]$$

de donde

$$P[R_1 = 0] = \frac{p_1 + p_b(1 - p_0)}{1 - p_0 + p_1}.$$

c) El fallo del sistema, S, se obtiene cuando ambas ramas fallan. Teniendo en cuenta que el funcionamiento de ambas ramas no es independiente debido a la dependencia entre A_1 y A_2, la correspondiente probabilidad puede calcularse de la siguiente forma

$$P[S = 0] = P[R_1 = 0 \cap R_2 = 0] = P[R_1 = 0|A_2 = 0]P[A_2 = 0]$$

La probabilidad $P[R_1 = 0|A_2 = 0]$ se desarrolla, de acuerdo con el teorema de la probabilidad total y teniendo en cuenta la independencia de A_1 y A_2 respecto a B_1, en la forma siguiente

$$P[R_1 = 0|A_2 = 0] = 1 - P[R_1 = 1|A_2 = 0] = 1 - P[A_1 = 1 \cap B_1 = 1|A_2 = 0] = 1 - (1 - p_0)(1 - p_b).$$

Sustituyendo este valor se llega a

$$P[S = 0] = \frac{p_0 p_1 (1 - p_b) + p_1 p_b}{1 - p_0 + p_1}$$

La comparación entre la probabilidad $P[S = 0]$ y $P[R_1 = 0]$ tiene como objetivo resaltar que se reduce la probabilidad de fallo del sistema por el hecho de añadir la rama R_2. Para ello, basta tener en cuenta que el fallo del sistema equivale a $(R_1 = 0) \cap (R_2 = 0)$ y que, si sólo se considera la primera rama, el fallo es $R_1 = 0$. Éste último suceso incluye al anterior (estrictamente a menos que el fallo de R_1 implique el de R_2). Por ello se puede afirmar que

$$P[S = 0] \leq P[R_1 = 0]$$

motivo por el cual la presencia de la rama R_2 mejora la seguridad global del sistema.

4.– Un productor de cine, con un buen historial de nominaciones para los óscar, ha seleccionado dos equipos de dirección A y B para su próxima película. Basándose en resultados, de ediciones anteriores, piensa que puede conseguir 0, 1, 2 ó 3 óscar según las siguientes probabilidades: si elige el equipo A, la probabilidad de 0, 1, 2, 3 óscar es 0.24, 0.42, 0.24 y 0.10 respectivamente, mientras que si elige el equipo B las probabilidades correspondientes son 0.20, 0.40, 0.40 y 0.00. El productor piensa que por problemas de disponibilidad de los equipos la probabilidad de elegir A es 2/3 de la probabilidad de elegir B.

a) Calcular la probabilidad de que la próxima película del productor reciba exactamente un óscar.

b) Si recibe exactamente un óscar, calcular la probabilidad de que la haya dirigido el equipo A.

c) Un aficionado al cine ha oído que la película ha recibido algún óscar, pero no sabe cuántos ni qué equipo la ha dirigido. Calcular la probabilidad de que haya sido el equipo B.

———————SOLUCIÓN———————

Llamemos N al número de óscar que consigue el equipo. Entonces, según el enunciado:

$$P[N=0|A]=0.24, P[N=1|A]=0.42, P[N=2|A]=0.24, P[N=3|A]=0.1$$

$$P[N=0|B]=0.2, P[N=1|B]=0.4, P[N=2|B]=0.4, P[N=3|B]=0.0$$

Sabemos tambien que $P[A]=(2/3)P[B]$. Como $P[A]+P[B]=1$ resulta $P[A]=2/5$ y $P[B]=3/5$.

a) $P[N=1]=P[N=1|A]P[A]+P[N=1|B]P[B]=0.42(2/5)+0.4(3/5)=0.408$ sin más que aplicar el teorema de la probabilidad total.

b) Aplicando el teorema de Bayes

$$P[A|N=1]=\frac{P[N=1|A]P[A]}{P[N=1]}=\frac{0.42\times(2/5)}{0.408}=0.412$$

c) En este caso nos piden $P[B|N\geq 1]$. Aplicando de nuevo Bayes

$$P[B|N\geq 1]=\frac{P[N\geq 1|B]P[B]}{P[N\geq 1]}=\frac{(1-P[N=0|B])P[B]}{(1-P[N=0])}$$

Pero

$$P[N=0]=P[N=0|A]P[A]+P[N=0|B]P[B]=0.24(2/5)+0.2(3/5)=0.216$$

Luego

$$P[B|N\geq 1]=\frac{(1-0.2)(3/5)}{(1-0.216)}=0.612$$

5.– La función de densidad conjunta de las variables aleatorias continuas X, Y y Z es constante en el rango conjunto $R_{X,Y,Z} \equiv (x^2 + y^2 \leq 1) \times (0 \leq z \leq 4)$ (que representa un cilindro circular de radio 1 y altura 4). Calcular

a) $P[X^2 + Y^2 \leq 0.5]$

b) $P[X^2 + Y^2 \leq 0.5 \cap Z < 2]$

c) La función de probabilidad conjunta de X e Y si $Z = 1$

d) La distribución marginal de X

———————————SOLUCIÓN———————————

El volumen del cilindro (rango conjunto) es $V = \pi r^2 h = 4\pi$. Consecuentemente, si $f_{X,Y,Z}(x, y, z)$ es la función de densidad conjunta (constante), dado que se ha de verificar

$$\int_{R_{X,Y,Z}} f_{X,Y,Z}(x, y, z) dxdydz = 1$$

necesariamente $f_{X,Y,Z}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi}$

a) La probabilidad pedida es

$$P[X^2 + Y^2 \leq 0.5] = \int_A f_{X,Y,Z}(x, y, z) dxdydz = \frac{1}{4\pi} \int_A dxdydz = \frac{1}{4\pi} Vol[A]$$

donde A es la parte del rango sobre la que queremos calcular la probabilidad y $Vol[A]$ su volumen. Pero A es un cilindro circular de radio $r = \sqrt{0.5}$ y altura $h = 4$, luego $Vol[A] = \pi r^2 h = 2\pi$ Luego $P[X^2 + Y^2 \leq 0.5] = 1/2$

b) La probabilidad pedida en este caso es $P[X^2 + Y^2 \leq 0.5 \cap Z < 2]$, y su valor, razonando como en el apartado anterior, es claramente $1/4$.

c) La función de densidad conjunta condicional de X e Y condicionadas a Z es

$$f_{X,Y|Z}(x, y, z) = \frac{f_{X,Y,Z}(x, y, z)}{f_Z(z)}$$

La función de densidad marginal de Z es, obviamente

$$f_Z(z) = \int_{R_{X,Y}} f_{X,Y,Z}(x, y, z) dxdy = \int_{(x^2+y^2) \leq 1} \frac{1}{4\pi} dxdy = \frac{\pi 1^2}{4\pi} = \frac{1}{4}, \quad R_Z = [0, 4]$$

que es obviamente una función de densidad correcta en el rango de Z. Por tanto

$$f_{X,Y|Z}(x, y, z) = \frac{f_{X,Y,Z}(x, y, z)}{f_Z(z)} = \frac{1/(4\pi)}{1/4} = \frac{1}{\pi}$$

expresión válida para todos los valores de Z y que cumple, como ha de ser

$$\int_{R_{X,Y}} f_{X,Y|Z}(x, y, z) dxdy = 1$$

d) Vamos a calcular la función de densidad conjunta de X e Y.

$$f_{X,Y}(x, y) = \int_{R_Z} f_{X,Y,Z}(x, y, z) dz = \int_0^4 \frac{1}{4\pi} dz = \frac{1}{\pi}, \quad R_{X,Y} \equiv (X^2 + Y^2) \leq 1$$

y efectivamente es una función de densidad ya que

$$\int_{R_{X,Y}} f_{X,Y}(x,y)dxdy = \int_{R_{X,Y}} \frac{1}{\pi}dxdy = \frac{\pi 1^2}{\pi} = 1$$

Obsérvese que hemos obtenido que

$$f_{X,Y|Z}(x,y,z) = f_{X,Y}(x,y)$$

lo que implica que la variable Z es independiente de las variables X e Y consideradas conjuntamente. Calculemos ahora, a partir de $f_{X,Y}(x,y)$ la marginal de X. Como sabemos $f_X(x) = \int_{R_Y} f_{X,Y}(x,y)dy$. Pero para cada valor x, el rango de Y es

$$R_Y = [-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}]$$

Luego

$$f_X(x) = \int_{R_Y} f_{X,Y}(x,y)dy = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi}dy = 2\frac{1}{\pi}\sqrt{1-x^2}, \quad R_X = [-1,1]$$

ya que el rango conjunto de X e Y es un círculo con radio unidad y centro el origen de coordenadas. Esta función es una función de densidad adecuada ya que

$$\int_{R_X} f(x)dx = \int_{-1}^{1} 2\frac{1}{\pi}\sqrt{1-x^2}dx = 2\frac{1}{\pi}\Big[\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{1}{2}arcsen(x)\Big]_{-1}^{1} = 2\frac{1}{\pi}\big[\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2})\big] = 1$$

y se representa en la figura siguiente.