CPE (SEGUNDO CURSO)

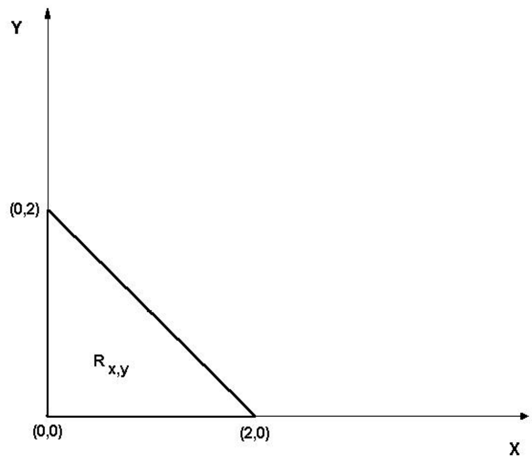
PRÁCTICA 3 **SOLUCIONES** (**Curso 2024–2025**)

1.– Sea un el rango conjunto de dos variables aleaotrias X e Y el triángulo comprendido entre los vértices (0,0), (0,2) y (2,0). Si la función de densidad es constante, se pide calcular:

a) La función de densidad conjunta y la función de distribución acumulada conjunta de X e Y.

b) Las funciones de densidad marginales de X e Y. ¿Son X e Y independientes?

SOLUCIÓN



a)

Dado el rango conjunto, la función de densidad conjunta es:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2}, \quad x, y \in R_{X,Y}$$

$$F_{X,Y}(x,y) = \frac{x\ y}{2}, \quad x, y \in R_{X,Y}$$

b)

$$f_X(x) = \int_{R_Y} f_{X,Y}(x,y)dy = \int_0^{y=2-x} \frac{1}{2}dy = \frac{2-x}{2}$$
$$f_Y(y) = \int_{R_X} f_{X,Y}(x,y)dx = \int_0^{x=2-y} \frac{1}{2}dx = \frac{2-y}{2}$$

Dado el rango conjunto las variables no son independientes. También lo podemos verificar observando que el producto de las distribuciones marginales no es igual a la conjunta.

2.– La variables aleatorias X e Y tienen la siguiente función de densidad conjunta:

$$f_{XY}(x,y) = kx(x-y), \quad 0 < x < 2, \quad -x < y < x.$$

a) Determínese k para que dicha función esté bien definida.

b) Calcúlese las distribuciones marginales de X y de Y.

c) Dibújese esquemáticamente la función de densidad marginal de Y.

——————————SOLUCIÓN——————————

a) Para que la función sea una función de densidad conjunta adecuada ha de verificarse

$$\int_{R_{XY}} f_{XY}(x,y)dxdy = 1$$

En nuestro caso

$$\int_{R_{XY}} f_{XY}(x,y)dxdy = \int_0^2 \left[\int_{-x}^{x} kx(x-y)dy\right]dx = \int_0^2 -kx\frac{(x-y)^2}{2}\Bigg]_{-x}^{x} dx =$$

$$= \int_0^2 2kx^3dx = k\frac{x^4}{2}\Bigg]_0^2 = 8k \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{8}$$

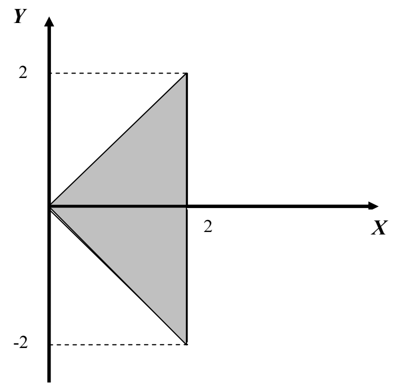
b) La función de densidad marginal de X es

$$f_X(x) = \int_{R_Y} f_{XY}(x,y)dy = \int_{-x}^{x} \frac{1}{8}x(x-y)dy = -\frac{1}{8}x\frac{(x-y)^2}{2}\Bigg]_{-x}^{x} = \frac{x^3}{4}$$

Obviamente esta es una función correcta, ya que

$$\int_0^2 \frac{x^3}{4}dx = \frac{x^4}{16}\Bigg]_0^2 = 1$$

La función de densidad marginal de Y, teniendo en cuenta que el rango conjunto es



puede obtenerse de la siguiente forma:

Para $-2 \leq y \leq 0$

$$f_Y(y) = \int_{R_X} f_{XY}(x,y)dx = \int_{-y}^{2} \frac{1}{8}x(x-y)dx = \int_{-y}^{2} \frac{1}{8}(x^2-xy)dx = \frac{1}{8}(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2y}{2})\Bigg]_{-y}^{2} = \frac{5y^3-12y+16}{48}$$

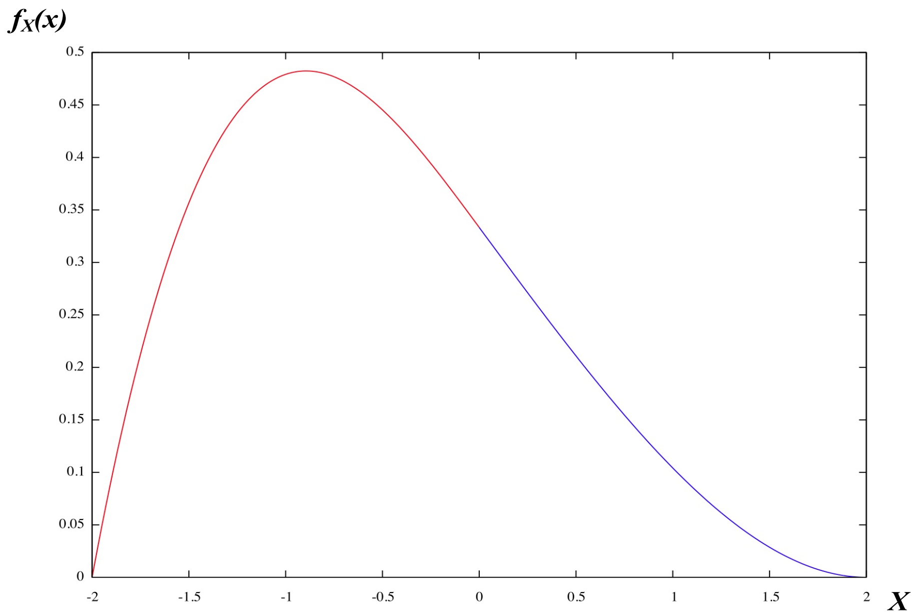
Para $0 \leq y \leq 2$

$$f_Y(y) = \int_{R_X} f_{XY}(x,y)dx = \int_{y}^{2} \frac{1}{8}x(x-y)dx = \int_{y}^{2} \frac{1}{8}(x^2-xy)dx = \frac{1}{8}(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2y}{2})\Bigg]_{y}^{2} = \frac{y^3-12y+16}{48}$$

Obviamente, también se trata de una función correcta ya que

$$\int_{-2}^{0} \frac{5y^3-12y+16}{48}dy + \int_{0}^{2} \frac{y^3-12y+16}{48}dy = 0.75 + 0.25 = 1$$

c) La función de densidad de Y es de la siguiente forma:



3.– Una empresa vende dos tipos de machacadoras, ligeras y pesadas. Sea X la demanda mensual de machacadoras ligeras, e Y la demanda mensual de machacadoras pesadas. La función de probabilidad conjunta de ambas demandas es:

X	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
Y					
0	0.01	0.08	0.06	0.10	0.06
1	0.04	0.15	0.16	0.06	0.04
2	0.02	0.10	0.05	0.05	0.02

a) Al principio de un mes hay dos machacadoras ligeras y una pesada en stock. ¿Cuál es la probabilidad de que ese mes se vendan todos los equipos?

b) Sabiendo que en un mes han tenido una demanda de machacadoras ligeras superior a 2, ¿cuál es la probabilidad de que la demanda de pesadas sea inferior a 2 en dicho mes?

SOLUCIÓN

a) Para que se venda todo el stock la demanda ha de ser tal que $X \geq 2 \cap Y \geq 1$. Calculando probabilidades

$$P[X \geq 2 \cap Y \geq 1] = P[(X = 2 \cap Y = 1) \cup (X = 3 \cap Y = 1) \cup (X = 4 \cap Y = 1) \cup$$

$$\cup (X = 2 \cap Y = 2) \cup (X = 3 \cap Y = 2) \cup (X = 4 \cap Y = 2)] = 0.38$$

ya que todos los sucesos son incompatibles

b) Nos piden $P[Y < 2|X > 2]$. Aplicando la definición de probabilidad condicional

$$P[Y < 2|X > 2] = \frac{P[Y < 2 \cap X > 2]}{P[X > 2]}$$

Pero

$$P[Y < 2 \cap X > 2] = 0.1 + 0.06 + 0.06 + 0.04 = 0.26$$

$$P[X > 2] = 0.33$$

Luego

$$P[Y < 2|X > 2] = 0.7879$$

4.– Considérense las variable aleatorias X e Y cuya función de densidad conjunta es:

$$f_{X,Y}(x, y) = e^{-y}, \quad x \geq 0, \quad y \geq x.$$

a) Calcular las funciones de densidad marginales

b) Evaluar P$[X > 2|Y < 4]$

SOLUCIÓN

a) La función de densidad marginal de, por ejemplo, Y es, por definición

$$f_Y(y) = \int_{R_X} f_{X,Y}(x, y)dx = \int_0^y e^{-y}dx = ye^{-y}, \quad y \geq 0$$

y es fácil comprobar que

$$\int_0^\infty ye^{-y}dy = 1$$

Igualmente

$$f_X(x) = \int_{R_Y} f_{X,Y}(x, y)dy = \int_x^\infty e^{-y}dy = -e^{-y}\Big]_x^\infty = e^{-x}, \quad x \geq 0$$

que también cumple las características de una función de densidad.

Es inmediato comprobar que las variables no son independientes.

b) Hay que calcular

$$P[X > 2|Y < 4] = 1 - P[X \leq 2|Y < 4] = 1 - \frac{P[X \leq 2 \cap Y < 4]}{P[Y < 4]} == 1 - \frac{F_{X,Y}(2,4)}{F_Y(4)}$$

Pero

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_0^x \int_0^y f_{X,Y}(x,y)dxdy = \int_0^x \int_x^y f_{X,Y}(x,y)dxdy = \int_0^x \int_x^y e^{-y}dydx =$$

$$= \int_0^x \left[-e^{-y} + e^{-x} \right] dx = -xe^{-y} - e^{-x} \Big]_0^x = 1 - e^{-x} - xe^{-y}, \quad x \geq 0, \quad y \geq x$$

Obsérvese que para $(x,y) = (0,0) \quad \rightarrow \quad F_{X,Y}(x,y) = 0$, para $(x,y) = (\infty, \infty) \quad \rightarrow \quad F_{X,Y}(x,y) = 1$, que $F_{X,Y}(x,y)$ es creciente en x para y constante y que $F_{X,Y}(x,y)$ es creciente en y para x constante. Luego es una función de distribución acumulada adecuada. Además

$$F_Y(y) = \int_0^y ye^{-y}dy = 1 - (1+y)e^{-y}$$

que también se comprueba fácilmente que es una función de distribución acumulada correcta. Por tanto

$$P[X > 2|Y < 4] = 1 - \frac{1 - e^{-2} - 2e^{-4}}{1 - 5e^{-4}} = 0.0885$$

5.– En una máquina de obra civil hay dos componentes cuya duración interesa controlar. Sea X la variable aleatoria que denota el tiempo de vida (meses) del primer componente e Y la que denota el tiempo de vida del segundo (también en meses). Se supone que estas variables aleatorias tienen una función de densidad conjunta definida por:

$$f_{X,Y}(x,y) = 0.02e^{(-0.1x - 0.2y)}, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

a) Verificar que, efectivamente, $f_{X,Y}(x,y)$ es una función de densidad de probabilidad conjunta.

b) Calcular las funciones de densidad marginales.

c) Calcular la probabilidad de que ambos componentes fallen antes de los 10 meses de uso.

d) Calcular la probabilidad de que el primer componente dure más de 20 meses.

e) Calcular la probabilidad de que el primer componente dure más de 15 meses, sabiendo que el segundo ha durado menos de 10 meses.

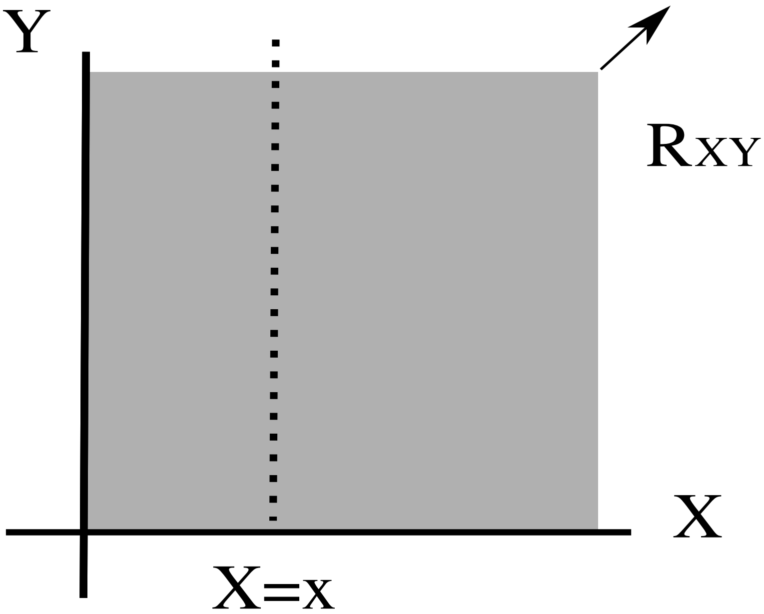
—————————SOLUCIÓN—————————

a) Es inmediato comprobar que f_{XY} es una función no negativa. Veamos que su integral es 1:

$$\begin{aligned}\int\int_{R_{XY}} f_{XY}(x,y)\,dxdy &= \int_0^\infty \int_0^\infty 0.02e^{(-0.1x-0.2y)} = 0.02\int_0^\infty e^{-0.1x}\,dx \int_0^\infty e^{-0.2y}\,dy \\ &= \int_0^\infty 0.1e^{-0.1x}\,dx \int_0^\infty 0.2e^{-0.2y}\,dy = 1\cdot 1\end{aligned}$$

b) Se tiene, para todo $x \in R_X = [0,\infty)$,

$$f_X(x) = \int_{R_{Y|X=x}} f_{XY}(x,y)dy$$



Como $R_{Y|X=x} = [0,\infty)$ para todo x (ver dibujo),

$$f_X(x) = \int_0^\infty 0.02e^{(-0.1x-0.2y)}dy = 0.1e^{-0.1x}\int_0^\infty 0.2e^{-0.2y}\,dy = 0.1e^{-0.1x}$$

Mediante un razonamiento totalmente análogo se obtiene $f_Y(y) = 0.2e^{-0.2y}$ para todo $y \in R_Y = [0,\infty)$. Además es inmediato que $f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ para todo $(x,y) \in R_{XY}$, por lo tanto son independientes.

c) Se trata de la probabilidad

$$\begin{aligned}P[0 \le X \le 10, 0 \le Y \le 10] &\overset{\text{indep}}{=} P[0 \le X \le 10]P[0 \le Y \le 10] = F_X(10)F_Y(10) = \\ &= (1-e^{-0.1\cdot 10})(1-e^{-0.2\cdot 10}) \cong 0.54657\end{aligned}$$

($F_X = 1-e^{-0.1x}$ y $F_Y(y) = 1-e^{-0.2y}$, se obtienen integrando las funciones de densidad de una forma evidente).

d) Se trata de la probabilidad $P[X > 20] = 1-P[X \le 20] = 1-F_X(20) = 1-(1-e^{-0.1\cdot 20}) \cong 0.13534$.

e) Nos piden $P[X \ge 15|Y < 10]$. Como X e Y son independientes, esto es lo mismo que $P[X \ge 15] = 1-F_X(15) = e^{-1.5} \cong 0.22313$.