CPE (SEGUNDO CURSO)

PRÁCTICA 2 **SOLUCIONES** (**Curso 2023–2024**)

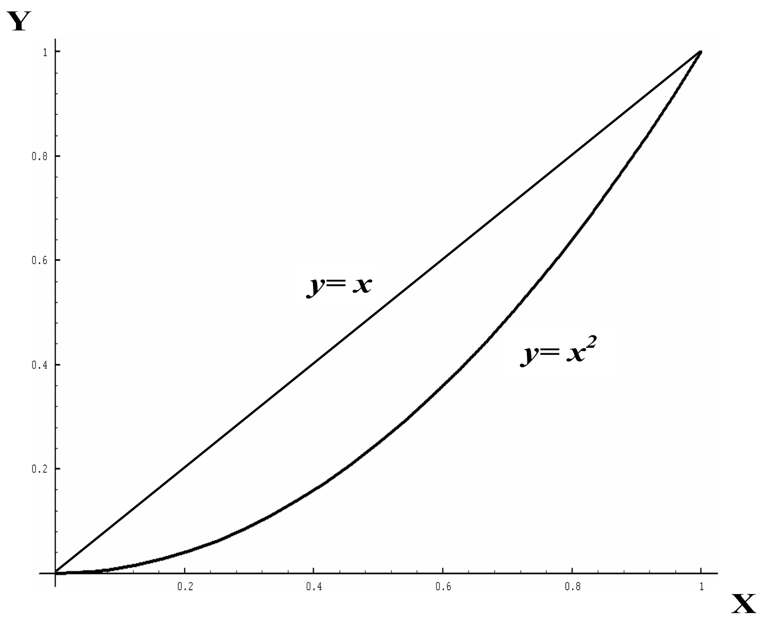
1.– Considérense las variables aleatorias X e Y distribuidas conjuntamente de forma que

$$f_{X,Y}(x,y) = cte, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad x^2 \leq y \leq x.$$

Dedúzcase las distribuciones marginales.

——————————SOLUCIÓN——————————

Veamos primero el rango conjunto de las dos variables. Es el área dibujada en el siguiente gráfico:



Averigüemos primero cuanto vale la función de densidad. Se ha de verificar

$$\int\int_{R_{XY}} f_{X,Y}(x,y)dxdy = 1$$

Integrando

$$\int_0^1 \int_{x^2}^x C dxdy = \int_0^1 C(x-x^2)dx = C\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = C\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\Big) = 1 \quad \Rightarrow \quad C = 6$$

Para calcular la marginal de X habrá que integrar la función de densidad conjunta sobre todo el rango de Y. Es decir

$$f_X(x) = \int_{R_Y} 6dy = \int_{x^2}^x 6dy = 6(x-x^2), \qquad 0 \leq x \leq 1$$

Calculemos la marginal de y

$$f_Y(y) = \int_{R_X} 6dx = \int_{y}^{\sqrt{y}} 6dx = 6(\sqrt{y} - y), \qquad 0 \leq y \leq 1$$

y se comprueba fácilmente que cumple los requisitos necesarios para ser una función de densidad.

2.– Una barra de acero sometida a tracción hasta rotura rompe en un punto situado al azar a lo largo de la barra. La barra se puede reutilizar para otros ensayos si uno de los dos trozos en los que se rompe es lo suficientemente largo. ¿Cuál es la probabilidad de que el trozo más largo tenga más del doble de longitud que el trozo más corto?

SOLUCIÓN

Sea L la longitud de la barra. Sea X el punto de rotura medido, por ejemplo, a partir del extremo izquierdo de la barra. Entonces la probabilidad pedida es

$$P = P\big[\{X \geq 2(L-X)\} \cup \{2X \leq (L-X)\}\big]$$

Como esos sucesos son incompatibles

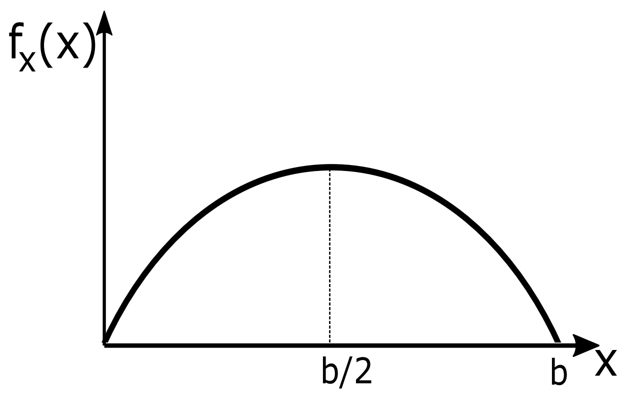
$$P = P\big[X \geq 2(L-X)\big] + P\big[2X \leq (L-X)\big] = P\big[X \geq \frac{2L}{3}\big] + P\big[X \leq \frac{L}{3}\big]$$

Como la rotura de la viga es al azar,

$$P\big[X \geq \frac{2L}{3}\big] = P\big[X \leq \frac{L}{3}\big] = \frac{1}{3}$$

Luego la probabilidad pedida vale $P = 2/3$

3.– Se sabe que la variable aleatoria X tiene como distribución una parábola como la de la siguiente figura.



Se pide determinar la función de densidad y la función de distribución acumulada de X.

4.– Se solicita a una persona que, de acuerdo con su experiencia, asigne probabilidades a cada uno de los siguientes sucesos:

A : Lloverá hoy

B : Lloverá mañana

C : Lloverá hoy y mañana

D : No lloverá ni hoy ni mañana

El sujeto en cuestión responde de la siguiente manera:

$$P[A] = 30\,\% \quad P[B] = 40\,\% \quad P[C] = 20\,\% \quad P[D] = 60\,\%$$

Esto es, obviamente, una asignación subjetiva de probabilidad. ¿Es correcto, desde el punto de vista probabilístico, dicho pronóstico?

—————————SOLUCIÓN—————————

Se tiene $C = A \cap B$ ("lloverá hoy y mañana") y $D = \overline{A \cup B}$ (el complementario de "lloverá hoy o mañana"). Para que la asignación de probabilidad tenga sentido ha de cumplirse

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B],$$

es decir, $1 - P[D] = P[A] + P[B] - P[C]$.

Aplicando a esta expresión los valores dados

$$1 - 0.6 = 0.3 + 0.4 - 0.2$$

expresión obviamente incorrecta.

Los valores asignados a las cuatro probabilidades no cumplen esta igualdad, por lo que no se trata de una asignación de probabilidad correcta.

5.– Te han invitado a jugar al siguiente juego. Se lanzan una única vez dos dados y ganas 54 € si la suma de los dos dados es 2, 3, 11 o 12, y pierdes 60 € si sale 7.

a) Calcular la función de probabilidad y la función de distribución acumulada de la variable aleatoria "dinero ganado en el juego".

b) ¿Conviene jugar a este juego?

—————————SOLUCIÓN—————————

La probabilidad de obtener un 2, 3, 11 o 12 tirando dos dados puede calcularse como:

Casos posibles: 36

Casos favorables: $\{1,1\}, \{1,2\}, \{2,1\}, \{5,6\}, \{6,5\}, \{6,6\}$. Es decir, 6

Luego la probabilidad de ganar es $1/6$.

La probabilidad de obtener un 7 viene determinada por los siguientes caso favorables (también 6): $\{1,6\}, \{6,1\}, \{2,5\}, \{5,2\}, \{3,4\}, \{4,3\}$, luego la probabilidad también es $1/6$. Es, por lo tanto, evidente, que la probabilidad de sacar cualquier otra suma es 4/6. Por consiguiente la función de probabilidad de la variable aleatoria $X \equiv$ "dinero ganado en el juego" es:

$$P_X(x) = \begin{cases} 1/6 & x = -60 \\ 4/6 & x = 0 \\ 1/6 & x = 54 \end{cases}$$

La función de distribución acumulada es igualmente inmediata y vale

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -60 \\ 1/6 & -60 \leq x < 0 \\ 5/6 & 0 \leq x < 54 \\ 1 & 54 \leq x \end{cases}$$

Es inmediato que no se debería jugar a este juego ya que en cada tirada hay la misma probabilidad de ganar y perder y la cantidad perdida (60 €) es mayor que la cantidad ganada (54 €).