CPE (SEGUNDO CURSO)

PRÁCTICA 2 **SOLUCIONES** (**Curso 2024–2025**)

1.– Una familia decide tener hijos hasta que tenga tres del mismo sexo. ¿Cuántos hijos tendrá esa familia? Supóngase la misma probabilidad de nacimiento de niño y niña.

———————SOLUCIÓN———————

Es obvio que, si X es la variable "número de hijos que se tienen hasta tener tres del mismo sexo", el rango de X es $R_X = \{3, 4, 5\}$, luego es suficiente calcular la probabilidad en estos tres puntos. Es obvio que

$$P_X(3) = P[\text{"tener tres hijos"} \cup \text{"tener tres hijas"}] = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}$$

Para que $X = 4$ ha de verificarse, o bien que se tengan tres hijos y una hija, siendo el último nacido un hijo, o bien tres hijas y un hijo, siendo la última nacida una hija. Por tanto

$$P_X(4) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{8}$$

Igualmente, para que $X = 5$ ha de verificarse, o bien que se tengan tres hijos y dos hijas, siendo el último nacido un hijo, o bien tres hijas y dos hijos, siendo la última nacida una hija. Por tanto

$$P_X(5) = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2 \times 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{3}{8}$$

Y se verifica, como era necesario, $P_X(3) + P_X(4) + P_X(5) = 1$

2.– Una barra de acero sometida a tracción hasta rotura rompe en un punto situado al azar a lo largo de la barra. La barra se puede reutilizar para otros ensayos si uno de los dos trozos en los que se rompe es lo suficientemente largo. ¿Cuál es la probabilidad de que el trozo más largo tenga más del doble de longitud que el trozo más corto?

———————SOLUCIÓN———————

Sea L la longitud de la barra. Sea X el punto de rotura medido, por ejemplo, a partir del extremo izquierdo de la barra. Entonces la probabilidad pedida es

$$P = P\big[\{X \geq 2(L - X)\} \cup \{2X \leq (L - X)\}\big]$$

Como esos sucesos son incompatibles

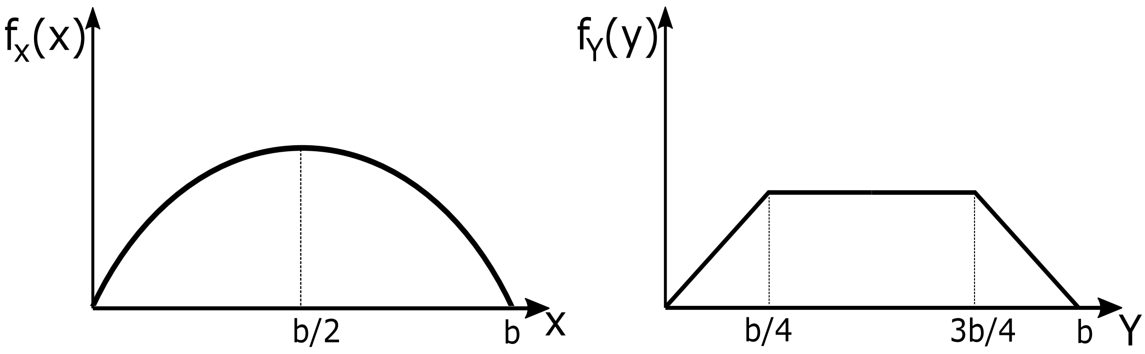
$$P = P\big[X \geq 2(L - X)\big] + P\big[2X \leq (L - X)\big] = P\big[X \geq \frac{2L}{3}\big] + P\big[X \leq \frac{L}{3}\big]$$

Como la rotura de la viga es al azar,

$$P\big[X \geq \frac{2L}{3}\big] = P\big[X \leq \frac{L}{3}\big] = \frac{1}{3}$$

Luego la probabilidad pedida vale $P = 2/3$

3.– Se sabe que las variables aleatorias X e Y tienen como función de densidad la siguiente figura:



Se pide:

a) Determinar la función de densidad y la función de distribución acumulada tanto para X como para Y.

NOTA: La función de densidad de X es una parábola.

——————————SOLUCIÓN——————————

a)

Primero determinaremos el rango, función de densidad y función de distribución acumulada de X. El rango de X es $R_X = [0, b]$, la función de densidad es una parábola de la forma: $f_X(x) = a_1x^2 + a_2x + a_3$

La función de densidad debe verificar que pasa por los puntos $(0, 0)$ y $(b, 0)$. Además de verificarse que $\int_0^b f_X(x)dx = 1$

Al imponer las restricciones obtenemos $f_X(0) = a_3 = 0$, $f_X(b) = a_1b^2 + a_2b = 0$, $\int_0^b f_X(x)dx = \frac{a_1}{3}b^3 + \frac{a_2}{2}b^2 = 1$.

Por tanto:

$$f_X(x) = \frac{-6}{b^3}x^2 + \frac{6}{b^2}x$$

$$F_X(x) = \int_0^x f_X(x)dx = \frac{-6}{3b^3}x^3 + \frac{6}{2b^2}x^2 = \frac{-2}{b^3}x^3 + \frac{3}{b^2}x^2$$

.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \dfrac{-2}{b^3}x^3 + \dfrac{3}{b^2}x^2 & 0 \leq x \leq b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$

Respecto a Y, $R_Y = [0, b]$

$$f_Y(y) = \begin{cases} c_1y & 0 \leq y \leq b/4 \\ c_2 & b/4 \leq y \leq 3b/4 \\ c_3y + c_4 & 3b/4 \leq y \leq b \end{cases}$$

Al imponerle las condiciones obtenemos

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{16}{3b^2}y & 0 \le y \le \dfrac{b}{4} \\ \dfrac{4}{3b} & \dfrac{b}{4} \le y \le \dfrac{3b}{4} \\ -\dfrac{16}{3b^2}y + \dfrac{16}{3b} & \dfrac{3b}{4} \le y \le b \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ \dfrac{8}{3b^2}y^2 & 0 \le y \le \dfrac{b}{4} \\ \dfrac{1}{6} + \dfrac{4}{3b}(y - \dfrac{b}{4}) & \dfrac{b}{4} \le y \le \dfrac{3b}{4} \\ \dfrac{5}{6} - \dfrac{16}{6b^2}(y^2 - \dfrac{9b^2}{16}) + \dfrac{16}{3b}(y - \dfrac{b}{4}) & \dfrac{3b}{4} \le y \le b \\ 1 & y \ge b \end{cases}$$

4.– El número X de averías que se producen anualmente en alguno de los cilindros de aceite de un cierto tipo de retroexcavadora es una variable aleatoria con distribución de Poisson $P[X = x] = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$ con parámetro $\lambda = 5$ averías/año. Un cierto aditivo para el aceite reduce el parámetro de Poisson con $\lambda = 3$ averías/año en el 75 % de las máquinas, pero en el otro 25 % no tiene efecto alguno. La empresa utiliza este aditivo en todas sus retroexcavadoras. Si pasado un año, una máquina específica se ha estropeado dos veces, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca al grupo para el que es efectivo el aditivo empleado?

——————————SOLUCIÓN——————————

Sea E el suceso "la retroexcavadora pertenece al grupo en el que es efectivo el aditivo". Tenemos que calcular la probabilidad de E condicionada a que el número de averías ha sido igual a 2. Por el Teorema de Bayes

$$P[E|X = 2] = \frac{P[X = 2|E]\,P[E]}{P[X = 2|E]\,P[E] + P[X = 2|\overline{E}]\,P[\overline{E}]}$$

Si la máquina pertenece al grupo en el que el aditivo resulta útil, el número de averías sigue una distribución de Poisson de parámetro 3. Por tanto,

$$P[X = 2|E] = e^{-3}\,\frac{3^2}{2!} = 0.224041807.$$

Si el aditivo no resulta efectivo, el número de averías sigue una distribución de Poisson de parámetro 5; calculamos de forma análoga

$$P[X = 2|\overline{E}] = e^{-5}\,\frac{5^2}{2!} = 0.084224337.$$

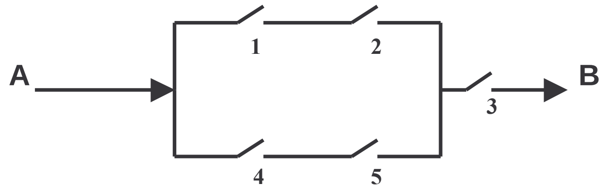
Hay un 75 % de máquinas en las que el producto resulta efectivo, por lo tanto

$$P[E] = 0.75, \quad P[\overline{E}] = 0.25$$

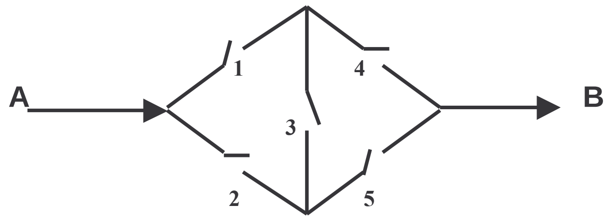
Sustituyendo en la fórmula del teorema de Bayes obtenemos

$$P[E|X = 2] = 0.8886$$

5.– La probabilidad de que en los sistemas de tuberías de las figuras la válvula iésima esté cerrada (es decir, permita el paso de fluido) es p_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Si todas las válvulas funcionan independientemente, calcúlese la probabilidad de que pase fluido entre los puntos A y B en cada uno de los sistemas.



Circuito 1



Circuito 2

Supóngase ahora que la válvula 3 no funciona independientemente de las demás, sino al igual que la válvula 4. ¿Cuál es ahora la probabilidad de que pase fluido entre los puntos A y B en cada uno de los sistemas?

————————SOLUCIÓN————————

Llamemos O_i al suceso "la válvula iésima está abierta" (es decir, permite el paso de fluido) y, lógicamente, $\overline{O_i}$ al suceso "la válvula iésima está cerrada". Sea B el suceso "llega fluido a B desde A".

Circuito 1

Entonces podemos escribir la siguiente identidad de sucesos:

$$B \equiv \left\{(O_1 \cap O_2) \cup (O_4 \cap O_5)\right\} \cap O_3 = (O_1 \cap O_2 \cap O_3) \cup (O_4 \cap O_5 \cap O_3)$$

Si ahora escribimos esta equivalencia en término de probabilidades, teniendo en cuenta que el funcionamiento de todas las válvulas es independiente, y que los sucesos $(O_1 \cap O_2 \cap O_3)$ y $(O_4 \cap O_5 \cap O_3)$ no son incompatibles,

$$P[B] = P[(O_1 \cap O_2 \cap O_3) \cup (O_4 \cap O_5 \cap O_3)] =$$

$$= P[(O_1 \cap O_2 \cap O_3)] + P[(O_4 \cap O_5 \cap O_3)] - P[(O_1 \cap O_2 \cap O_3) \cap (O_4 \cap O_5 \cap O_3)] =$$

$$= P[(O_1 \cap O_2 \cap O_3)] + P[(O_4 \cap O_5 \cap O_3)] - P[(O_1 \cap O_2 \cap O_3 \cap O_4 \cap O_5)] = \quad (1)$$

$$= P[O_1]P[O_2]P[O_3] + P[O_4]P[O_5]P[O_3] - P[O_1]P[O_2]P[O_3]P[O_4]P[O_5] =$$

$$= p_1p_2p_3 + p_4p_5p_3 - p_1p_2p_3p_4p_5$$

Obsérvese que si las válvulas se abriesen al azar ($p_i = 1/2$), $\quad P[B] = \frac{1}{4} - \frac{1}{32} = \boxed{0.21875}$

Circuito 2

En este caso vamos a utilizar condicionantes para resolver más fácilmente el problema. Supongamos primero que se cumple $\overline{O_3}$. Entonces

$$P[B|\overline{O_3}] = P[(O_1 \cap O_4) \cup (O_2 \cap O_5)] =$$

$$= P[(O_1 \cap O_4)] + P[(O_2 \cap O_5)] - P[(O_1 \cap O_4) \cap (O_2 \cap O_5)] = p_1p_4 + p_2p_5 - p_1p_2p_4p_5$$

Supongamos ahora que se cumple O_3. Entonces

$$P[B|O_3] = P[(O_1 \cup O_2) \cap (O_4 \cup O_5)] =$$

$$= P[(O_1 \cup O_2)]P[(O_4 \cup O_5)] = (p_1 + p_2 - p_1p_2)(p_4 + p_5 - p_4p_5)$$

Y aplicando ahora el teorema de probabilidad total

$$P[B] = P[B|\overline{O_3}]P[\overline{O_3}] + P[B|O_3]P[O_3] = P[B|\overline{O_3}](1 - p_3) + P[B|O_3]p_3 =$$

$$= (p_1p_4 + p_2p_5 - p_1p_2p_4p_5)(1 - p_3) + (p_1 + p_2 - p_1p_2)(p_4 + p_5 - p_4p_5)p_3$$

Obsérvese que si las válvulas se abriesen al azar ($p_i = 1/2$), $\quad P[B] = \frac{2}{4} - \frac{1}{16} = \boxed{0.5}$

Supongamos ahora que $O_3 \equiv O_4$

Circuito 1

Teniendo en cuenta la expresión anterior (1) podemos escribir directamente

$$P[B] = P[(O_1 \cap O_2 \cap O_3)] + P[(O_4 \cap O_5 \cap O_3)] - P[(O_1 \cap O_2 \cap O_3 \cap O_4 \cap O_5)] =$$

$$= P[(O_1 \cap O_2 \cap O_4)] + P[(O_4 \cap O_5)] - P[(O_1 \cap O_2 \cap O_4 \cap O_5)] = p_4p_5 + p_1p_2p_4 - p_1p_2p_4p_5$$

Obsérvese que si las válvulas se abriesen al azar ($p_i = 1/2$), $\quad P[B] = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} = \boxed{0.31250}$

Circuito 2

Haremos lo mismo que antes pero teniendo en cuenta que $O_3 \equiv O_4$

$$P[B|\overline{O_3}] = P[B|\overline{O_4}] = P[(O_2 \cap O_5)] = p_2p_5$$

$$P[B|O_3] = P[B|O_4] = P[(O_1 \cup O_2)] = p_1 + p_2 - p_1p_2$$

Y aplicando el teorema de probabilidad total

$$P[B] = P[B|\overline{O_4}]P[\overline{O_4}] + P[B|O_4]P[O_4] = P[B|\overline{O_4}](1 - p_4) + P[B|O_4]p_4 =$$

$$= p_2p_5(1 - p_4) + (p_1 + p_2 - p_1p_2)p_4 = p_2p_5 + p_1p_4 + p_2p_4 - p_2p_5p_4 - p_1p_2p_4$$

Obsérvese que si las válvulas se abriesen al azar ($p_i = 1/2$), $\quad P[B] = \frac{3}{4} - \frac{2}{8} = \boxed{0.5}$