CPE (SEGUNDO CURSO)

PRÁCTICA 1 **SOLUCIONES** **(Curso 2024–2025)**

1.– Dos cadenas de fabricación, A y B, tienen diferentes tolerancias, de forma que la medida de de un producto defectuoso fabricado por A es $p_A = 0.05$ y fabricado por B es $p_B = 0.02$. Los ritmos de fabricación también son diferentes, con $N_A = 300$ unidades/hora y $N_B = 200$ unidades/hora. Al salir de las cadenas los productos se mezclan y se embalan indistintamente.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que, de 100 unidades, 2 sean defectuosas?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que, elegida al azar una unidad, y resultando defectuosa, haya sido fabricada por la cadena B?

——————————SOLUCIÓN——————————

La probabilidad de que una unidad sea fabricada por A es $P[A] = 3/5 = 0.6$ y la de que sea fabricada por B es $P[B] = 2/5 = 0.4$.

a) Sea D es suceso una pieza es defectuosa. Sabemos que $P[D|A] = p_A = 0.05$ y $P[D|B] = p_B = 0.02$. Aplicando el teorema de probabilidad total

$$P[D] = P[D|A]P[A] + P[D|B]P[B] = 0.05 \times 0.6 + 0.02 \times 0.4 = 0.038$$

Sea R la probabilidad de que entre 100 piezas (ya mezcladas) haya dos defectuosas. Obviamente

$$R = \binom{100}{2} 0.038^2 (1 - 0.038)^{98} = 0.16$$

En la expresión anterior, $\binom{100}{2}$ es el número de posiciones distintas que pueden ocupar las dos piezas defectuosas entre las 100 unidades mezcladas.

b) debemos calcular $P[B|D]$. Aplicando el teorema de Bayes

$$P[B|D] = \frac{P[D|B]P[B]}{P[D|A]P[A] + P[D|B]P[B]} = \frac{0.02 \times 0.4}{0.038} = 0.21$$

2.– Suponiendo que los sucesos *terremotos* y *huracanes* son independientes y que en un determinado lugar la probabilidad de un terremoto durante un minuto es de 10^{-8} y la de un huracán es de 10^{-5}, se pide:

1.- Determinar la probabilidad de que ocurran simultáneamente ambos fenómenos en un minuto. Las normas de edificación no obligan a que el ingeniero calcule una obra bajo esta hipótesis (terremoto y huracán a la vez). ¿Es razonable esta norma?

2.- Calcular la probabilidad de que, durante un minuto, ocurra alguno de los dos fenómenos señalados.

3.- Si dos sucesos en dos minutos diferentes son independientes, ¿qué probabilidad hay de que no se presenten terremotos en un año en dicho lugar?. ¿Y en 10 años?

——————————SOLUCIÓN——————————

1.- Llamamos T al suceso "se produce un terremoto" y H al suceso "se produce un huracán", todo ello en un minuto determinado. Se tiene, ya que ambos sucesos se suponen independientes,

$$P[T \cap H] = P[T]P[H] = 10^{-8} \times 10^{-5} = 10^{-13}$$

Se puede interpretar que aproximadamente en uno de cada 10^{13} minutos ocurren un terremoto y un huracán de forma simultánea. Dado que 10^{13} minutos son más de diecinueve millones de años, la norma es razonable.

2.- Con la misma notación que la del apartado anterior, se nos pide

$$P[T \cup H] = P[T] + P[H] - P[T \cap H] = 10^{-8} + 10^{-5} - 10^{-13} = 1.001 \times 10^{-5}$$

3.- Un año (que suponemos dura 365 días) son 525,600 minutos. Llamemos T_n y H_n, respectivamente, a los sucesos "ocurre un terremoto en el minuto n-simo" y "ocurre un huracán en el minuto n-simo" de ese año, donde $n = 1, 2, \ldots, 525,600$. Lo que nos piden es

$$P[\overline{T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_{525,600}}] = P[\overline{T_1} \cap \overline{T_2} \cap \ldots \cap \overline{T_{525.600}}]$$
$$\overset{\text{indeptes.}}{=} P[\overline{T_1}]P[\overline{T_2}] \ldots P[\overline{T_{525,600}}] = (1 - 10^{-8})^{525,600} = 0.9948$$

En 10 años: es el mismo cálculo para 5,256,000 minutos. El resultado es

$$(1 - 10^{-8})^{5,256,000} = 0.9488$$

3.– Durante una investigación sobre el origen de accidentes aéreos en un cierto tipo de aviones se sabe que, si la causa del accidente es un fallo estructural, la probabilidad de que se identifique la causa adecuadamente (es decir, que se concluya que es un fallo estructural) es del 90 %. La probabilidad de que un accidente cuya causa no sea un fallo estructural se identifique incorrectamente como causado por un fallo estructural es del 20 %. Si se sabe que el 25 % de los accidentes son causados por fallos estructurales, ¿cuál es la probabilidad de que si se diagnostica la causa de un accidente como fallo estructural esta identificación sea correcta?

——————————SOLUCIÓN——————————

Llamemos F al suceso "fallo estructural" y C al suceso "identificación como fallo estructural". Los datos que tenemos son $P[C|F] = 0.9$, $P[C|\overline{F}] = 0.2$, $P[F] = 0.25$. Nos piden $P[F|C]$. Por definición

$$P[F|C] = \frac{P[F \cap C]}{P[C]} = \frac{P[C \cap F]}{P[C]} = \frac{P[C|F]P[F]}{P[C]}$$

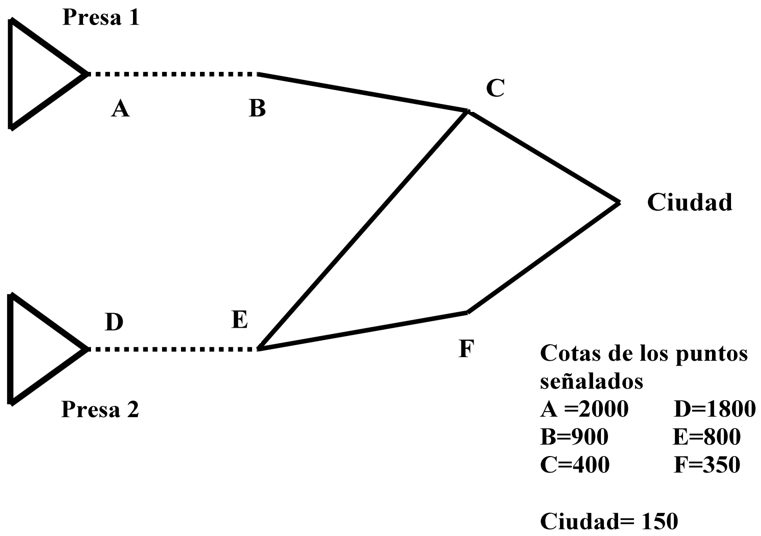
Pero por otra parte, y de acuerdo con el teorema de probabilidad total,

$$P[C] = P[C|F]P[F] + P[C|\overline{F}]P[\overline{F}] = 0.9 \times 0.25 + 0.2 \times 0.75 = 0.375$$

y por lo tanto

$$P[F|C] = \frac{P[C|F]P[F]}{P[C]} = \frac{0.9 \times 0.25}{0.375} = 0.6$$

4.– La figura representa el sistema de canales (línea continua) y túneles (línea a trazos) para abastecimiento de agua a una cierta ciudad, y en ella se han indicado las cotas de los puntos más representativos. La pendiente de cada tramo de canal o túnel es constante en el tramo. La probabilidad de que un canal falle un día cualquiera es de 0.05 (por obstrucción, rotura, necesidad de reparación o limpieza, etc) y la probabilidad de que falle un túnel es de 0.1. Calcular la probabilidad de que un día cualquiera falle el suministro de agua a la ciudad.



——————————SOLUCIÓN——————————

Suponemos que todos los canales y túneles fallan o funcionan de forma independiente. El enlace entre los puntos A y C a través de B es equivalente a un único conducto que tiene probabilidad $0.9 \cdot 0.95 = 0.855$ de funcionar. Análogamente, el enlace entre E y la ciudad (que representaremos por G) se puede reducir a un solo conducto con probabilidad $0.95 \cdot 0.95 = 0.9025$ de funcionar.

Sea F el suceso "falla el suministro de agua a la ciudad". Para simplificar el cálculo vamos a dividir el espacio total en varios sucesos disjuntos y exhaustivos. Por ejemplo podemos distinguir estos cuatro casos: "por los tramos CG y EG circula agua" ($CG \cap EG$), "circula por CG pero no por EG" ($CG \cap \overline{EG}$), "circula por EG pero no por CG" ($\overline{CG} \cap EG$), "no circula por CG ni por EG" ($\overline{CG} \cap \overline{EG}$). Por el teorema de la probabilidad total

$$\begin{aligned} P[F] &= P[F|CG \cap EG]P[CG \cap EG] + P[F|CG \cap \overline{EG}]P[CG \cap \overline{EG}] \\ &\quad + P[F|\overline{CG} \cap EG]P[\overline{CG} \cap EG] + P[F|\overline{CG} \cap \overline{EG}]P[\overline{CG} \cap \overline{EG}] \end{aligned}$$

Se tiene (aplicando la hipótesis de independencia) $P[CG \cap EG] = 0.95 \cdot 0.9025$, $P[CG \cap \overline{EG}] = 0.95(1 - 0.9025)$, $P[\overline{CG} \cap EG] = (1 - 0.95)0.9025$, $P[\overline{CG} \cap \overline{EG}] = (1 - 0.95)(1 - 0.9025)$.

Para calcular $P[F|CG \cap EG]$ basta tener en cuenta que si CG y EG funcionan, el suministro falla si y sólo si fallan simultáneamente AC y DE. En símbolos: $\overline{AC} \cap \overline{DE}$; por tanto $P[F|CG \cap EG] = (1 - 0.855)(1 - 0.9)$ (de nuevo hemos usado la hipótesis de independencia).

Para calcular $P[F|CG \cap \overline{EG}]$ basta imaginarse el circuito de arriba sin la conexión EG y con CG funcionando con seguridad. El suministro fallará si falla AC y además falla alguno entre DE y EC. En símbolos: $\overline{AC} \cap (\overline{DE} \cup \overline{EC}) = \overline{AC} \cap (\overline{DE \cap EC})$; por tanto $P[F|CG \cap \overline{EG}] = (1 - 0.855)(1 - 0.9 \cdot 0.95)$.

Para calcular $P[F|\overline{CG} \cap EG]$ basta imaginarse el circuito de arriba sin la conexión CG y con EG funcionando con seguridad. El suministro fallará si y sólo si falla DE. Por tanto $P[F|\overline{CG} \cap EG] = 1 - 0.9$.

Si CG y EG fallan simultáneamente, la probabilidad de que falle el suministro es claramente 1.

Finalmente se obtiene

$$\begin{aligned} P[F] &= (1-0.855)(1-0.9)0.95 \cdot 0.9025 + (1-0.855)(1-0.9\cdot 0.95)0.95(1-0.9025) \\ &\quad + (1-0.9)(1-0.95)0.9025 + 1\cdot(1-0.95)(1-0.9025) \approx 0.02377. \end{aligned}$$

5.– Para diagnosticar determinada enfermedad se utiliza un cierto test. Si se realiza este test a un paciente enfermo, la probabilidad de que resulte positivo es del 95 % y si se realiza a un paciente sano la probabilidad de que el test resulte negativo es del 90 %. Se sabe que 5 personas de cada 1000 en determinada población tienen la enfermedad.

(a) Calcular la probabilidad de que una persona de esa población tenga la enfermedad, si el resultado del test es positivo.

(b) Calcular la probabilidad de que una persona de esa población no tenga la enfermedad, si el resultado del test es negativo.

(c) Analizar críticamente los resultados

——————SOLUCIÓN——————

Llamemos S al suceso "estar" enfermo y T al suceso "dar positivo en el análisis". Los datos que tenemos son

$$P[S] = 0.005 \;\rightarrow\; P[\overline{S}] = 0.95;\; P[T|S] = 0.95 \;\rightarrow\; P[\overline{T}|S] = 0.05;\; P[\overline{T}|\overline{S}] = 0.9 \;\rightarrow\; P[T|\overline{S}] = 0.1$$

a) Nos piden $P[S|T]$. Aplicando el teorema de Bayes

$$P[S|T] = \frac{P[T|S]P[S]}{P[T|S]P[S] + P[T|\overline{S}]P[\overline{S}]} = \frac{0.95 \times 0.005}{0.95 \times 0.005 + 0.1 \times 0.995} = 0.04556$$

b) Ahora nos piden $P[\overline{S}|\overline{T}]$. Aplicando el teorema de Bayes

$$P[\overline{S}|\overline{T}] = \frac{P[\overline{T}|\overline{S}]P[\overline{S}]}{P[\overline{T}|\overline{S}]P[\overline{S}] + P[\overline{T}|S]P[S]} = \frac{0.9 \times 0.995}{0.9 \times 0.995 + 0.05 \times 0.005} = 0.99972$$

c) A la vista de los resultados, si el test sale negativo es altamente probable que estés sano. Ahora bien, si da resultado positivo es también muy probable (más del 95 %) que estés sano. Luego la prueba diagnóstica no sirve para detectar a los enfermos (que es para lo que debería servir).
