CPE (SEGUNDO CURSO)

PRÁCTICA 1 **SOLUCIONES** (**Curso 2023–2024**)

1.– Para determinar el diseño de una nueva carretera que conecta dos poblaciones (denominadas ”Origen” y ”Destino”) se requiere estimar cuantitativamente la intensidad media diaria de vehículos (IMD). Para ello, se realiza un análisis de la demanda de la nueva infraestructura para los dos sentidos de circulación. Particularizando la demanda para el sentido Origen-Destino, se ha zonificado el área de estudio en función de diversas características (usos del suelo, poblaciones existentes, etc.), resultando 3 áreas diferenciadas que recogen el total de los viajes posibles, que denominaremos A, B y C. A partir de los datos disponibles de los distintos aforos y de la modelización de la demanda de transporte, se conoce que el 15 % de los usuarios que viajan hacia la población Destino procederían de la zona A y un 30 % procederían de la zona B. Los resultados del estudio de movilidad determinaron que un 50 % de los usuarios que realizan el trayecto con origen de la zona A, empezarán a utilizar el nuevo corredor; de la zona B, un 30 % y de la zona C, un 25 %.

(a) Determinar la probabilidad de que un usuario (procedente de las áreas A, B y C) que viaje a la población Destino realice el trayecto a través de la nueva carretera.

(b) Dado un usuario al azar de la nueva carretera que viaje a la población Destino, calcula la probabilidad de que proceda del área A.

(c) Dado un usuario al azar de la nueva carretera que viaje a la población Destino, calcula la probabilidad de que proceda del área B o C.

———————SOLUCIÓN———————

Se definen los sucesos X_A ”usuario con origen en la zona A”, X_B ”usuario con origen en la zona B” y X_C ”usuario con origen en la zona C”.

Se define el suceso D como ”usuario que circule en el sentido Origen-Destino emplea la nueva carretera”.

$$P[X_A] = 0.15, \quad P[X_B] = 0.3$$

Los sucesos X_A y X_B son incompatibles, observamos que su unión no es el espacio total ya que falta X_C. Por tanto

$$P[X_A] + P[X_B] + P[X_C] = 1$$

de donde se obtiene

$$P[X_C] = 0.55$$

Del enunciado también conocemos las siguientes probabilidades.

$$P[D|X_A] = 0.5, \quad P[D|X_B] = 0.3, \quad P[D|X_C] = 0.25$$

a) Empleando el teorema de la probabilidad total se obtiene

$$P[D] = P[D|X_A]\, P[X_A] + P[D|X_B]\, P[X_B] + P[D|X_C]\, P[X_C] =$$

$$= 0.5 \cdot 0.15 + 0.3 \cdot 0.3 + 0.25 \cdot 0.55 = 0.3025$$

b) En este apartado se nos pide calcular $P[X_A|D]$

$$P[X_A|D] = \frac{P[D|X_A]\, P[X_A]}{P[D]} = \frac{0.5 \cdot 0.15}{0.3025} = 0.2479$$

c) En este apartado se nos pide calcular $P[X_B \cup X_C|D]$. Dado que son sucesos incompatibles

$$P[X_B \cup X_C|D] = P[X_B|D] + P[X_C|D]$$

$$P[X_B|D] = \frac{P[D|X_B]\, P[X_B]}{P[D]} = \frac{0.3 \cdot 0.3}{0.3025} = 0.2975$$

$$P[X_C|D] = \frac{P[D|X_C]\, P[X_C]}{P[D]} = \frac{0.25 \cdot 0.55}{0.3025} = 0.4545$$

$$P[X_B \cup X_C|D] = 0.2975 + 0.4545 = 0.7521$$

También se podría haber calculado de la siguiente manera

$$P[X_B \cup X_C|D] = 1 - P[X_A|D] = 1 - 0.2479 = 0.7521$$

2.– En el proceso constructivo de un firme flexible es necesario el empleo de una compactadora tras el extendido de la mezcla bituminosa con el fin de reducir las oquedades propias del extendido y lograr la densidad fijada en la normativa. Las compactadoras tienen de una serie de sensores que determinan si la energía transmitida al firme es suficiente o por el contrario es necesario realizar más pasadas.

Una determinada empresa constructora tiene tres modelos de compactadoras diferentes (A, B y C), empleándose en el 45 %, 30 % y el 25 % de los tramos a asfaltar. En el proceso, dichas compactadoras pueden cometer un error en la medición que deriva en una compactación errónea en el 3 %, 4 % y 5 % de los casos respectivamente.

Se pide:

a) Si durante el proceso de control de calidad se examina un tramo al azar, determinar la probabilidad de que el tramo sea defectuoso.

b) Si un tramo al azar está compactado de manera defectuosa, calcular la probabilidad de que haya sido compactado por una compactadora tipo B.

c) Si un tramo al azar está compactado de manera defectuosa, ¿qué máquina tiene mayor probabilidad de haber compactado erróneamente el tramo?

———————SOLUCIÓN———————

a) Sea el suceso F ”compactar de manera defectuosa”. Los datos proporcionados por el enunciado son:

$$P[A] = 0.45, \quad P[B] = 0.30, \quad P[C] = 0.25,$$
$$P[F|A] = 0.03, \quad P[F|B] = 0.04, \quad P[F|C] = 0.05.$$

Por el teorema de la probabilidad total:

$$P[F] = P[F|A]P[A] + P[F|B]P[B] + P[F|C]P[C] = 0.03 \cdot 0.45 + 0.04 \cdot 0.30 + 0.05 \cdot 0.25 = 0.038.$$

b) Nos piden calcular $P[B|F]$, por lo que, aplicando el teorema de Bayes obtenemos

$$P[B|F] = \frac{P[F|B]P[B]}{P[F|A]P[A] + P[F|B]P[B] + P[F|C]P[C]} = \frac{P[F|B]P[B]}{P[F]} = \frac{0.04 \cdot 0.30}{0.038} = 0.3158.$$

c) En este apartado nos piden calcular $P[A|F]$, $P[B|F]$ y $P[C|F]$. Entonces, aplicando el teorema de Bayes obtenemos

$$\begin{aligned} P[A|F] &= \frac{P[F|A]P[A]}{P[F]} = \frac{0.03 \cdot 0.45}{0.038} = 0.355, \\ P[B|F] &= 0.3158, \\ P[C|F] &= \frac{P[F|C]P[C]}{P[F]} = \frac{0.05 \cdot 0.25}{0.038} = 0.3289. \end{aligned}$$

De los porcentajes obtenidos se deduce que la máquina A tiene una mayor probabilidad de haber compactado erróneamente el tramo defectuoso.

3.– Dos empresas constructoras, que denominaremos A y B, trabajan en tres tipos de obra: pequeñas, medianas y grandes. La empresa A tiene, en cada uno de los tres tipos de obra, una probabilidad mayor que la de la empresa B de "obtener beneficios" de la realización de cada obra. Sin embargo, el responsable de la empresa B afirma que, sumando todos los tipos de obra, su empresa tiene una probabilidad mayor de "obtener beneficios" de la realización de cada obra que la empresa A. ¿Miente el responsable de la empresa B? ¿Es posible que lo que afirma sea cierto? La respuesta ha de justificarse adecuadamente. En caso de que se considere de que el responsable de la empresa B no miente, ha de presentarse un ejemplo con el que se compruebe que su aseveración puede ser cierta.

——————SOLUCIÓN——————

Definamos los sucesos $P \equiv$ "obra pequeña", $M \equiv$ "obra mediana" y $G \equiv$ "obra grande. Sea, por otra parte B_A el suceso "la empresa A obtiene beneficio en una obra" y B_B el suceso "la empresa B obtiene beneficio en una obra".

a) Supongamos que la proporción de obras pequeñas, medianas y grandes que se realizan es igual para cada empresa. En este caso, sabemos que

$$P[B_A|P] > P[B_B|P], \quad P[B_A|M] > P[B_B|M], \quad P[B_A|G] > P[B_B|G]$$

Entonces, como

$$P[B_A] = P[B_A|P]P[P] + P[B_A|M]P[M] + P[B_A|G]P[G]$$

y

$$P[B_B] = P[B_B|P]P[P] + P[B_B|M]P[M] + P[B_B|G]P[G]$$

es imposible que, tal como afirma el responsable de la empresa B, $P[B_A] > P[B_B]$

b) Supongamos ahora, por el contrario que la proporción de obras realizadas por cada empresa no sea la misma. En este caso

$$P[B_A] = P[B_A|P_A]P[P_A] + P[B_A|M_A]P[M_A] + P[B_A|G_A]P[G_A]$$

y

$$P[B_B] = P[B_B|P_B]P[P_B] + P[B_B|M_B]P[M_B] + P[B_B|G_B]P[G_B]$$

siendo inmediato el significado de la notación utilizada.

En este caso, las probabilidades de beneficio no sólo dependen de las condiciones dadas, sino del porcentaje de obras de cada tipo, por lo que la afirmación del responsable de la empresa B puede ser cierta. Por ejemplo si para la empresa A

$$P[B_A|P_A] = 0.1,\ P[B_A|M_A] = 0.2,\ P[B_A|G_A] = 0.3,\ P[P_A] = 0.6,\ P[M_A] = 0.3,\ P[G_A] = 0.1$$

y para la empresa B

$$P[B_B|P_B] = 0.05,\ P[B_B|M_B] = 0.15,\ P[B_B|G_B] = 0.25,\ P[P_B] = 0.1,\ P[M_B] = 0.3,\ P[G_B] = 0.6$$

resulta

$$P[B_A] = 0.15, \qquad P[B_B] = 0.20$$

luego la afirmación puede ser cierta.

4.– En las proximidades de una obra en la que se van a construir tres viaductos se ha instalado una planta de prefabricados, cuya finalidad consiste en la ejecución de elementos que, al final del proceso, se trasladan a obra y se colocan en su posición final.

Entre los elementos prefabricados se encuentran tres tipos de vigas artesas (A, B y C), de las que se van a fabricar 6, 12 y 2 unidades, respectivamente. Se ha observado que la probabilidad de que aparezcan fisuras debido al fraguado en las vigas artesas tipo A es de 0.2, en el tipo B es de 0.15 y en el tipo C se desconoce su valor. Sin embargo, de acuerdo a la experiencia en obras similares, la probabilidad de que eligiendo una viga artesa con fisuras al azar, esta sea de tipo C, puede ser 0.6, 0.5 o 0.3.

(a) ¿Cuál o cuáles de los tres valores de la probabilidad de que dada una viga artesa con fisuras esta sea tipo C, pueden ser válidos? Razonar la respuesta.

(b) Determinar la probabilidad de que tomando una viga al azar, esta presente fisuras.

SOLUCIÓN

Designamos con F el suceso "la viga artesa presenta fisuras", con A el suceso "la viga artesa es del tipo A", con B el suceso "la viga artesa es del tipo B" y con C el suceso "la viga artesa es del tipo C". Los sucesos A, B y C son incompatibles, y su unión es el espacio total.

Del enunciado del problema tenemos

$$P[F|A] = 0.2, \quad P[F|B] = 0.15, \qquad P[F|C] = p$$

donde el valor de p es desconocido. Adicionalmente, se pueden calcular las siguientes probabilidades

$$P[A] = 0.3, \quad P[B] = 0.6, \qquad P[C] = 0.1$$

Del enunciado también se deduce que la siguiente probabilidad

$$q = P[C|F]$$

puede valer 0.6, 0.5 o 0.3.

a) Aplicando el teorema de probabilidad total podemos calcular la probabilidad de que tomando una viga al azar, esta tenga fisuras

$$P[F] = P[F|A]\,P[A] + P[F|B]\,P[B] + P[F|C]\,P[C] =$$

$$= 0.2 \cdot 0.3 + 0.15 \cdot 0.6 + p \cdot 0.1 = 0.15 + 0.1 \cdot p.$$

Nos preguntan cual o cuales de los valores de q pueden ser válidos, esto es, la probabilidad de que una viga artesa con fisuras elegida al azar sea del tipo C. Esta probabilidad la podemos calcular a partir del teorema de Bayes

$$P[C|F] = \frac{P[F|C]\,P[C]}{P[F]} = \frac{p \cdot 0.1}{0.15 + 0.1 \cdot p} = q$$

De donde podemos despejar el valor de p (probabilidad de que una viga artesa del tipo C presente fisuras)

$$p = \frac{0.15 \cdot q}{0.1 \cdot (1 - q)}$$

donde sabemos que la probabilidad de un suceso debe cumplir que sea mayor o igual a 0 y menor o igual a 1. Al introducir en la expresión anterior los posibles valores de q: $q_1 = 0.6$, $q_2 = 0.5$ y $q_3 = 0.3$ obtenemos

$$p|_{q_1} = P[F|C]|_{q_1} = 2.25$$

$$p|_{q_2} = P[F|C]|_{q_2} = 1.50$$

$$p|_{q_3} = P[F|C]|_{q_3} = 0.6429$$

de donde observamos que el único valor válido es el que se obtiene con $q_3 = 0.3$.

b) En este apartado se pide calcular la siguiente probabilidad

$$P[F] = P[F|A]\,P[A] + P[F|B]\,P[B] + P[F|C]\,P[C] = 0.2 \cdot 0.3 + 0.15 \cdot 0.6 + p \cdot 0.1 = 0.21429$$

5.– Hay dos carreteras entre los pueblos de montaña A y B, y otras dos entre los pueblos de montaña B y C. Cada una de las carreteras puede ser bloqueada por la nieve con probabilidad p. Dado que todas las carreteras discurren por diferentes valles, pueden considerarse, por lo que a su bloqueo se refiere, como independientes.

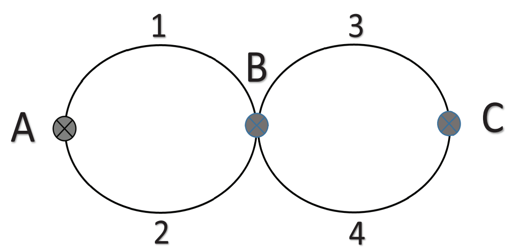
a) ¿Cuál es la probabilidad de que pueda viajarse del pueblo A al pueblo C?

b) Si no puede irse de A a C, ¿cuál es la probabilidad de que se pueda circular entre los pueblos A y B?

c) Se proyecta construir otra carretera directa entre A y C, por otro valle, y que no pase por B. La probabilidad de que esta carretera se bloqueara es también p, y sería independiente de todas las demás. Repítanse los dos apartados anteriores en este supuesto.

SOLUCIÓN

Denominemos los posibles caminos por los números 1,2,...,4, tal como indica la siguiente figura, y sea "1" el suceso "el camino está abierto" y "$\overline{1}$" el suceso "el camino está bloqueado".



Sabemos que

$$P[\,\overline{1}\,] = P[\,\overline{2}\,] = P[\,\overline{3}\,] = P[\,\overline{4}\,] = p$$

a) Si llamamos AC al suceso "puede viajarse de A a C" podemos escribir

$$P[AC] = P[(1 \cup 2) \cap (3 \cup 4)] = P[(1 \cup 2)]P[(3 \cup 4)] =$$

$$= \Big(P[1] + P[2] - P[1 \cap 2]\Big)\Big(P[3] + P[4] - P[3 \cap 4]\Big) =$$

$$= \Big(P[1] + P[2] - P[1]P[2]\Big)\Big(P[3] + P[4] - P[3]P[4]\Big) =$$

$$\big(2(1-p) - (1-p)^2\big)^2 = \big(2 - 2p - 1 + 2p - p^2\big)^2 = (1-p^2)^2$$

b) Utilizando la misma notación que en el apartado anterior, lo que nos piden es $P[AB|\overline{AC}]$. Aplicando la definición de probabilidad condicional

$$P[AB|\overline{AC}] = \frac{P[AB \cap \overline{AC}]}{P[\ \overline{AC}\ ]} = \frac{P[\overline{AC} \cap AB]}{P[\ \overline{AC}\ ]} = \frac{P[\overline{AC}|AB]P[AB]}{P[\ \overline{AC}\ ]}$$

Analicemos cada una de esta probabilidades.

$$P[\overline{AC}|AB] = P[\ \overline{BC}\ ] = P[\ \overline{3} \cap \overline{4}\ ] = P[\ \overline{3}\ ]P[\ \overline{4}\ ] = p^2$$

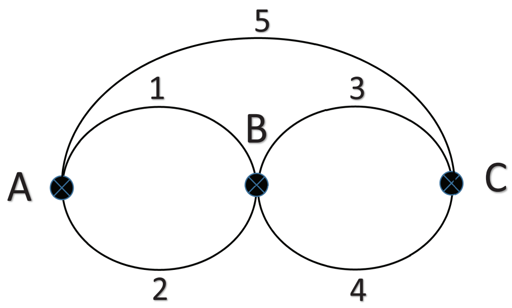
$$P[AB] = P[(1 \cup 2)] = \Big(P[1] + P[2] - P[1]P[2]\Big) = \big(2(1-p) - (1-p)^2\big) = (1-p^2)$$

$$P[\ \overline{AC}\ ] = 1 - P[AC] = 1 - (1-p^2)^2$$

Operando

$$P[AB|\overline{AC}] = \frac{p^2(1-p^2)}{1-(1-p^2)^2} = \frac{p^2(1-p^2)}{(1-(1-p^2))(1+(1-p^2))} = \frac{1-p^2}{2-p^2}$$

c) La situación es ahora la mostrada en la figura siguiente.



En este caso, y utilizando la misma notación, los cálculos serían

$$P[AC] = P\Big[\big\{(1\cup 2)\cap(3\cup 4)\big\}\cup 5\Big] = P\Big[\big\{(1\cup 2)\cap(3\cup 4)\big\}\Big] + P[5] - P\Big[\big\{(1\cup 2)\cap(3\cup 4)\big\}\cap 5\Big] =$$

$$= P[(1\cup 2)]P[(3\cup 4)] + P[5] - P[(1\cup 2)]P[(3\cup 4)]P[5] =$$

$$= (1-p^2)^2 + (1-p) - (1-p^2)^2(1-p) = p(1-p^2)^2 + (1-p)$$

Por otra parte, con respecto a la segunda cuestión

$$P[AB|\overline{AC}] = \frac{P[AB \cap \overline{AC}]}{P[\ \overline{AC}\ ]} = \frac{P[\overline{AC} \cap AB]}{P[\ \overline{AC}\ ]} = \frac{P[\overline{AC}|AB]P[AB]}{P[\ \overline{AC}\ ]}$$

Analizando las probabilidades por separado

$$P[\overline{AC}|AB] = P[\ \overline{BC} \cap \overline{5}\ ] = P[\ \overline{3} \cap \overline{4} \cap \overline{5}\ ] = p^3$$

$$P[AB] = P[(1 \cup 2)] = \Big(P[1] + P[2] - P[1]P[2]\Big) = \big(2(1-p) - (1-p)^2\big) = (1-p^2)$$

$$P[\ \overline{AC}\ ] = 1 - P[AC] = 1 - p(1-p^2)^2 - (1-p) = p[1-(1-p^2)^2]$$

Y por tanto

$$P[AB|\overline{AC}] = \frac{p^3(1-p^2)}{p[1-(1-p^2)^2]} = \frac{p^2(1-p^2)}{1-(1-p^2)^2} = \frac{1-p^2}{2-p^2}$$

que es el mismo resultado que se obtenía sin el camino nuevo (cosa lógica, por otra parte, ya que como no se puede ir de A a C, para lo que sucede entre A y B poco tiene que ver ese camino, que no pasa por B).