CPE (SEGUNDO CURSO)

PRÁCTICA 0 **SOLUCIONES** (**Curso 2023–2024**)

1.– Considérese una función de n variables $f(x_1, x_2, ..., x_n)$. ¿Cuántas derivadas parciales de orden r se pueden calcular?

———————SOLUCIÓN———————

Teniendo en cuenta el teorema de Schwartz habrá $CR_{n,r}$ combinaciones posibles, donde la expresión anterior significa combinaciones con repetición de n elementos tomados de r en r sin tener en cuenta el orden. Por tanto

$$N = \binom{n+r-1}{r}$$

2.– Tenemos 200.000 euros que queremos invertir entre 4 fondos de inversión. Las inversiones se cuentan de diez mil en diez mil euros, y lo mínimo que se puede invertir en cada uno de los fondos es 20.000, 20.000, 30.000 y 40.000 euros, respectivamente. ¿Cuántas estrategias diferentes de inversión hay si

a) debe de invertirse en todos los fondos?

b) debe de invertirse al menos en tres fondos de los cuatro posibles?

———————SOLUCIÓN———————

(a) debe de invertirse en todos los fondos?

Una vez reservados los importes mínimos de los 4 fondos nos quedan $20 - (2 + 2 + 3 + 4) = 9$ decenas de miles de euros por invertir. Hay que distribuir 9 elementos indistinguibles en 4 clases distintas; la solución es

$$\mathbf{CR}(9, 4) = \binom{9+4-1}{9} = 220 \text{ estrategias distintas.}$$

(b) debe de invertirse al menos en tres fondos de los cuatro posibles?

Hay que sumar las estrategias obtenidas en el apartado anterior con las que involucren exactamente tres fondos de inversión. Si excluimos el primer fondo, nos quedan $20-(2+3+4) = 11$ decenas de miles de euros a invertir en tres fondos; análogamente al apartado anterior, existen $\mathbf{CR}(11, 3) = \binom{11+3-1}{11} = 78$ posibilidades. Si excluimos el segundo, $\mathbf{CR}(11, 3) = \binom{11+3-1}{11} = 78$. Si excluimos el tercero, $\mathbf{CR}(12, 3) = \binom{12+3-1}{12} = 91$. Si excluimos el cuarto, $\mathbf{CR}(13, 3) = \binom{13+3-1}{13} = 105$. El número total de estrategias es por lo tanto

$$220 + 78 + 78 + 91 + 105 = 572.$$

3.– En la cola de la caja del supermercado hay 10 personas, siendo tú la última (la número 10). Para entretenerte hasta que te atiendan te preguntas

(a) ¿Cuántos grupos de 5 personas se pueden formar con las 10 personas?

(b) ¿Cuántos grupos con un número impar de componentes se pueden formar con las 10 personas?

(c) ¿Cuántos grupos con un número arbitrario de componentes te incluyen a ti?

(d) ¿Cuántos te incluyen a ti y no incluyen al señor del bote de pepinillos?

——————————SOLUCIÓN——————————

(a)

Número de subconjuntos de 5 elementos de un conjunto de 10: combinaciones de 10 elementos tomados de 5 en 5

$$\mathbf{C}(10,5) = \binom{10}{5} = 252 \text{ grupos}$$

Para los siguientes apartados tendremos en cuenta que el número total de subconjuntos de un conjunto de m elementos es 2^m (cada elemento puede estar o no estar en el subconjunto: dos posibilidades para cada uno de los m elementos).

(b)

Nos piden

$$\begin{aligned}
&\mathbf{C}(10,1) + \mathbf{C}(10,3) + \mathbf{C}(10,5) + \mathbf{C}(10,7) + \mathbf{C}(10,9) \\
=&\binom{10}{1} + \binom{10}{3} + \binom{10}{5} + \binom{10}{7} + \binom{10}{9} \\
=&2\binom{10}{1} + 2\binom{10}{3} + \binom{10}{5} = 512 = 2^9 \text{ grupos}
\end{aligned}$$

Vemos que sale la mitad de la cantidad total de subconjuntos. En efecto, un conjunto de m elementos tiene el mismo número de subconjuntos con cardinal par que con cardinal impar: 2^{m-1}. Intentad hacer una demostración general.

(c)

Cada grupo que me incluye a mí lo puedo obtener uniéndome a cada uno de los 2^9 grupos que puedo formar con las 9 personas restantes. La respuesta es por lo tanto $2^9 = 512$ grupos.

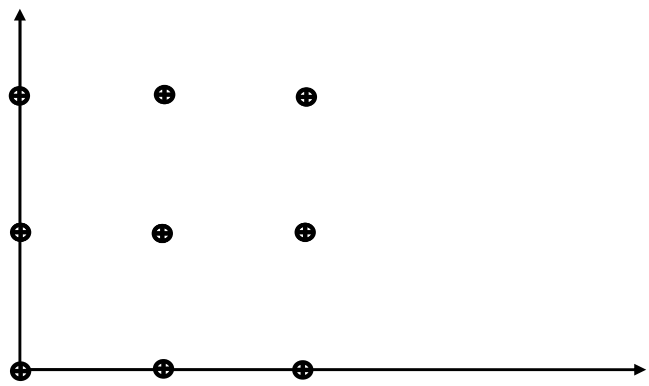
(d)

Cada grupo que me incluye a mí y no al señor de los pepinillos lo puedo obtener uniéndome a cada uno de los 2^8 grupos que puedo formar con las 8 personas restantes. La respuesta es por lo tanto $2^8 = 256$ grupos.

4.– ¿Cuántas circunferencias en el plano pasan por al menos tres de los puntos (0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (2,1), (2,2)?

——————————SOLUCIÓN——————————

La situación de los puntos es la que indica el dibujo adjunto



Hay $\binom{9}{3}$ combinaciones de estos 9 puntos tomados de 3 en 3. Pero si los tres puntos están alineados, no se podrá dibujar una circunferencia. Hay 8 combinaciones de puntos alineados: tres verticales, tres horizontales y las dos diagonales. Luego el número de circunferencias que se podrá dibujar es

$$N = \binom{9}{3} - 8 = 84 - 8 = 76$$

5.– Hay cuatro carreteras diferentes entre la ciudad A y la B, tres entre B y C, y dos carreteras que unen A y C sin pasar por B.

(a) ¿Cuántos trayectos diferentes hay entre A y C pasando por B?

(b) ¿Cuántos trayectos diferentes hay para ir de A a C y volver a A?

(c) ¿Cuántos trayectos diferentes hay para ir de A a C y volver a A, pasando al menos una vez por B?

(d) ¿Cuántos trayectos diferentes hay para ir de A a C y volver, sin usar dos veces la misma carretera?

——————SOLUCIÓN——————

(a) Utilizando la regla del producto obtenemos $4 \cdot 3 = 12$ trayectos diferentes (tres posibilidades para el segundo tramo por cada una de las cuatro posibilidades para el primero).

(b) Para ir de A a C hay en total 14 trayectos (los 12 del apartado anterior, más dos de un solo tramo). Para volver de C a A hay otros 14 trayectos (los inversos de los de ida). Según la regla del producto, o la fórmula de las variaciones con repetición, para ir de A a C y volver tendremos $14 \cdot 14 = 196$ posibilidades.

(c) Como ya hemos calculado el número total de trayectos de ida y vuelta, sólo tenemos que restarles los que no pasan por B, que son los que utilizan una de las carreteras directas tanto a la ida como a la vuelta. Hay 2 carreteras directas entre A y C, por lo tanto $2 \cdot 2 = 4$ formas de hacer el viaje de ida y vuelta sin pasar por B. En definitiva, la respuesta es $196 - 4 = 192$.

(d) Aquí tenemos que contar con un poco más de cuidado. Si vamos de A a C pasando por B (12 posibilidades, según hemos calculado en (a)), tendremos que volver

- o bien por una de las 2 carreteras directas,
- o bien pasando de nuevo por B, en cuyo caso podemos escoger entre 2 carreteras distintas para el primer tramo (porque una ya la hemos usado al venir), y 3 para el segundo (por la misma

razón): $2 \cdot 3 = 6$ posibilidades. Así, en este caso tenemos 12 posibilidades para la ida, por $2+6$ posibilidades para la vuelta: 96 trayectos diferentes.

Si por el contrario vamos de A a C escogiendo una de las 2 carreteras directas, podremos hacer la vuelta

- o bien por la otra carretera directa,
- o bien por uno de los $3 \cdot 4 = 12$ trayectos que pasan por B,

lo que supone un total de 2 posibilidades para la ida por $1 + 12$ posibilidades para la vuelta: 26 trayectos diferentes.

La suma total es $96 + 26 = 122$ trayectos en total.

6.– Tenemos seis libros de Cálculo en francés, ocho en inglés y cinco en castellano. ¿Cuántas formas hay de colocar todos estos libros en una estantería si los libros escritos en el mismo idioma han de estar juntos?

SOLUCIÓN

Si por ejemplo colocamos primero los libros en francés, después los libros en inglés y a continuación los libros en castellano (configuración de tipo F-I-C), para escoger cada una de las formas de colocar los libros tendríamos que dar una ordenación de cada uno de los tres grupos, es decir, una permutación de 6 elementos, una de 8 y una de 5. Por la regla del producto, habría en total

$$\mathbf{P}(6) \cdot \mathbf{P}(8) \cdot \mathbf{P}(5)$$

configuraciones de tipo F-I-C. Es claro que hay el mismo número de configuraciones I-C-F, C-I-F etc. así que hay que multiplicar este número por el número de permutaciones de C, I, F, es decir, $\mathbf{P}(3)$. Dado que $\mathbf{P}(n) = n!$ para cualquier n, el resultado final es

$$6! \cdot 8! \cdot 5! \cdot 3! = 20901888000$$

7.– Una pieza de dominó es un trozo rectangular de madera cuya cara superior aparece dividida en dos cuadrados. Cada uno de los cuadrados o bien está en blanco o bien contiene una cantidad de puntos que varía entre uno y seis. Mostrar que hay exactamente 28 piezas distintas en el juego de dominó.

SOLUCIÓN

Lo resolveremos de dos formas distintas.

(a) Claramente hay 7 piezas que contienen un cuadrado blanco. Hay 7 piezas que contienen un uno pero una de ellas ya la hemos contado (la 0-1), es decir, hay 6 piezas que contienen un 1 y no un 0. Hay 5 piezas que contienen un 2 y no contienen un 1 ni un 0, etc. Sumando los elementos de cada una de estas clases disjuntas obtenemos

$$7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28$$

(b) Se puede plantear como un problema de combinaciones con repetición (distribuir n elementos indistinguibles entre r clases distinguibles). Si imaginamos $r = 7$ urnas numeradas del 0 al 6, cada ficha del dominó queda caracterizada por la colocación arbitraria de $n = 2$ bolas iguales en ese sistema de urnas. Las dos bolas en la urna 0 significan los dos cuadrados blancos, una bola en la urna 2 y otra en la 5 representa la pieza 2-5, etc. Según la fórmula de las combinaciones con repetición

$$\mathbf{CR}(n, r) = \binom{n+r-1}{n} \qquad (n \text{ elementos, } r \text{ clases})$$

resulta que el número de piezas es $\binom{2+7-1}{2} = 28$.

8.– Diez personas se disponen a sentarse a cenar alrededor de una mesa circular. Se consideran iguales las configuraciones en las que coinciden las posiciones relativas de los comensales.

(a) ¿De cuántas formas diferentes pueden sentarse?

(b) ¿De cuántas si se impone la limitación de que dos determinadas personas de ese grupo se sienten separadas?

———————SOLUCIÓN———————

(a) Fijamos uno de los comensales, le llamamos A. A partir de la silla que elija A y por ejemplo, en el sentido de las agujas del reloj, cada permutación de los nueve comensales restantes da una colocación diferente a la mesa. Luego el número total es $9! = 362880$.

(b) Sean B y C esas dos personas. Vamos a calcular el número de configuraciones en las que B y C están *juntos*. Fijamos a B en la mesa y recorremos el resto de los comensales por ejemplo en el sentido de las agujas del reloj. Si C está a su lado, entonces es que es el siguiente, o bien el último, en esa enumeración. Tanto en un caso como en otro tenemos $8!$ permutaciones libres, las de los ocho comensales restantes. Luego B y C están juntos en $8! + 8! = 80640$ configuraciones, y por lo tanto están separados en $362880 - 80640 = 282240$.

9.– En un torneo internacional se han inscrito seis tenistas procedentes de Sildavia. Con ellos se han de formar tres equipos de dos personas cada uno para participar en la modalidad de dobles. ¿De cuántas formas se pueden formar los equipos?

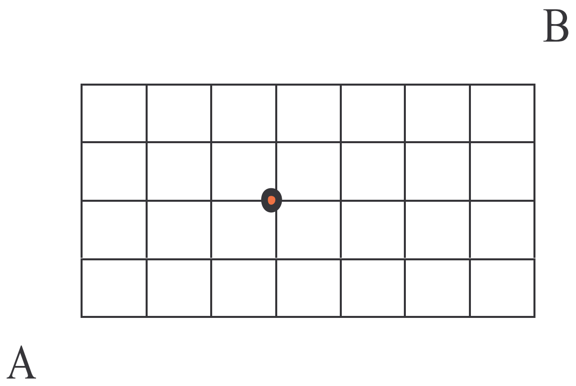
———————SOLUCIÓN———————

Vamos a suponer primero que distinguimos entre los tres equipos, que llamaremos A, B y C. Si empezamos formando el equipo A, tenemos $\mathbf{C}(6, 2)$ parejas posibles que asignar. Para el B tenemos $\mathbf{C}(4, 2)$, porque quedan por asignar cuatro jugadores, y para el C es claro que sólo queda una posibilidad: los dos jugadores sobrantes ($\mathbf{C}(2, 2) = 1$). Por la regla del producto, el resultado sería

$$\binom{6}{2}\binom{4}{2} = 90 \text{ distribuciones}$$

En el enunciado del problema no queda claro si debemos distinguir entre los tres equipos o no. Si no lo hacemos, debemos identificar entre sí aquellas distribuciones que se obtengan permutando los equipos A, B y C. La identificación se hace de 6 en 6 ya que $\mathbf{P}(3) = 3! = 6$. Luego con esta interpretación llegamos al resultado $90/6 = 15$ distribuciones.

10.– Vives en una urbanización que se puede representar esquemáticamente con el siguiente diagrama:



Una mañana te dispones a desplazarte desde A hasta B. Es claro que para hacerlo tendrás que recorrer al menos 11 tramos (un "tramo" es la longitud del lado de una manzana).

(a) ¿Cuántos recorridos formados por 11 tramos llevan desde A hasta B?

(b) ¿Cuántos de 12 tramos?

(c) Si deseas evitar a toda costa la intersección marcada en el dibujo (por motivos que no vienen al caso), ¿cuántos recorridos de 11 tramos puedes seguir?

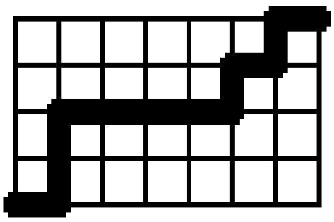
————————SOLUCIÓN————————

Vamos a utilizar los símbolos $\uparrow$, $\downarrow$, $\rightarrow$, $\leftarrow$ para representar las etapas de los distintos recorridos; el significado es evidente.

(a) Un recorrido de 11 tramos sólo puede constar de 4 tramos hacia arriba y 7 hacia la derecha (según la orientación del plano) y viceversa, cada secuencia formada por 4 símbolos $\uparrow$ y 7 símbolos $\rightarrow$, en cualquier orden, representa uno de esos recorridos. Por ejemplo

$$\rightarrow\uparrow\uparrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\uparrow\rightarrow\uparrow\rightarrow$$

representa la siguiente trayectoria



(Es inmediato que si recorremos algún tramo hacia abajo o hacia la izquierda, no podremos completar el recorrido en 11 tramos.) Luego el número de recorridos coincide con

$$\mathbf{PR}(11; 4, 7) = \frac{11!}{4!\,7!} = 330$$

(b) ¿Cuántos de 12 tramos? No hay *ningún* recorrido de 12 tramos. Al final del camino hemos tenido que hacer al menos 7 tramos hacia la derecha y 4 hacia arriba; sólo quedaría sitio para uno, que tendría que haberse hecho hacia la izquierda o hacia abajo, y que habría que desandar en algún momento, con lo que necesitaríamos un decimotercer tramo.

(c) Es más sencillo contar los recorridos que sí pasan por el punto conflictivo, y restarlos de los totales. Para llegar desde A hasta el punto marcado tenemos $\mathbf{PR}(5;3,2) = \frac{5!}{3!\,2!} = 10$ posibles caminos (el razonamiento es el mismo que en el apartado (a); recordar que sólo podemos ir hacia arriba o hacia la derecha ya que el recorrido total ha de constar de 11 tramos), y para ir desde el punto marcado hasta B, $\mathbf{PR}(6;4,2) = \frac{6!}{4!\,2!} = 15$; por la regla del producto, $10 \cdot 15 = 150$ de los posibles recorridos pasan por ese punto, y por lo tanto $330 - 150 = 180$ lo evitan.