CPE (SEGUNDO CURSO)

PRÁCTICA 14 (Curso 2024–2025)

1.– Se sabe que un distanciómetro de alta precisión proporciona lecturas de una cierta distancia (aproximadamente entre 3 y 4 Km) distribuidas normalmente y de media igual a la distancia que se pretende medir. Aunque no se conoce la varianza, se sabe que ésta no excede a 4 cm^2.

a) ¿Cuál es el número mínimo de lecturas que habrá que tomar para asegurarse que el intervalo de confianza del 90 % sobre la media tenga longitud inferior a 1 cm?

b) Supongamos que un topógrafo realizó el número de lecturas adecuado según el apartado anterior y obtuvo $\bar{x} = 350089.78$ cm y $S^2 = 3.0\ \text{cm}^2$. ¿Cuál sería su estima por intervalo de la longitud deseada?

2.– El tiempo de fallo de un componente sigue una distribución exponencial de parámetro desconocido. Estos componentes se utilizan en el ensamblaje de dos sistemas distintos; en el primero se ensamblan en serie n_1 componentes, y en el segundo, también en serie, n_2 componentes. Se ensayan ambos sistemas y se obtienen los tiempos hasta fallo de cada sistema, t_1 y t_2, respectivamente.

Se pide:

a) Con la información disponible determinar el estimador máximo verosímil de λ.

b) Calcular el intervalo de confianza por ambos lados del 90 % sobre λ, para el caso en que $n_1 = 10 = n_2$, y $t_1 = 400$ horas y $t_2 = 350$ horas.

Nota: el montaje en serie supone que el sistema funciona únicamente cuando todos los componentes del sistema están funcionando correctamente.

3.– Una cierta población tiene una función de densidad que puede expresarse como $f_X(x) = \frac{2}{\theta^2}(\theta - x), \quad 0 < x < \theta$. Consideramos un estimador de θ dado por $T = 2x_1$, donde x_1 es una muestra de tamaño 1 de la población. Hallar un intervalo de confianza sobre θ $(1 - \alpha = 0.95)$ utilizando la técnica que se desee. ¿Es T un estimador de máxima verosimilitud de θ?

4.– Para medir la vibración de una sonda de perforación de roca se utilizan dos medidores Doppler, de diferentes fabricantes, que utilizan distintos generadores de rayo laser. Sobre una sonda concreta se realizan 200 ensayos con uno de los medidores, obteniéndose una media de frecuencia $\bar{x}_1 = 3.5 \times 10^3\ Hz$ y una desviación típica de $S_1 = 0.2 \times 10^3\ Hz$. El resultado de 150 ensayos con el segundo medidor da como resultados $\bar{x}_2 = 3.4 \times 10^3\ Hz$ y $S_2 = 0.15 \times 10^3\ Hz$. Para comparar dichos medidores de acuerdo con la normativa se debe calcular un intervalo de confianza $(1 - \alpha = 0.99)$ sobre la diferencias de las frecuencias medias poblacionales medidas por ambos aparatos (los aparatos no miden directamente la frecuencia de vibración de la sonda, sino la detección de un cambio Doppler en la frecuencia de la luz coherente dispersada por un objetivo en movimiento, del cual se obtiene una medición resuelta en el tiempo de la velocidad del objetivo). Calcular dicho intervalo silas desviaciones típicas son las verdaderas $(S_1 = \sigma_1, \quad S_2 = \sigma_2)$.

A la vista de los resultados y sin realizar más cálculos, ¿pueden considerarse iguales las medias proporcionadas por ambos aparatos?

5.– Se modela un sistema ecológico de manera que la especie animal dominante consume un tanto por uno, X, $0 \leq X \leq 1$, de los recursos totales del sistema que denotamos R. Se ha supuesto que X tiene la función de densidad de probabilidad:

$$f_X(x) = 2(1-x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

a) Hallar la función de densidad de probabilidad de $W = XR$, el total de recursos consumido por la especie animal.

b) Suponiendo que se dispone de una muestra de W, $w_1, w_2, ...w_n$, determinar cómo se calcularía el estimador de máxima verosimilitud de R. Particularizar el resultado para el caso de una muestra de tamaño 1.
